African Journal Of Mathematical Physics Volume **2** *Number* **2** *(2005)21-61*

Quantification par Déformation

Martin Bordemann

Laboratoire des Mathématiques et Applications
Faculté des Sciences et Techniques, Université de Haute Alsace, Mulhouse
4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse, France
e-mail: M.Bordemann@univ-mulhouse.fr

Abstract

Une variété de Poisson (M, P) est une variété différentiable munie d'un champ de bivecteurs $P \in \Gamma\left(\Lambda^2 TM\right)$ tel que pour toutes fonctions f, g de classe C^∞ à valeurs réelles sur M l'application bilinéaire $(f, g) \longmapsto P(df, dg)$, le crochet de Poisson soit un crochet de Lie. En particulier, chaque variété symplectique (M, ω) est une variété de Poisson. Le sujet de la quantification par déformation selon [1] est la déformation formelle associative de l'algèbre associative commutative $C^\infty(M)$ (l'algèbre de toutes les fonctions C^∞ sur M à valeurs réelles) telle que le commutateur d'ordre 1 est égal au crochet de Poisson. Plus précisément, sur l'espace $C^\infty(M)[[\lambda]]$ de toutes les séries formelles à coefficients dans $C^\infty(M)$ on cherche une multiplication $* : C^\infty(M)[[\lambda]] \times C^\infty(M)[[\lambda]] \longmapsto C^\infty(M)[[\lambda]]$ (le star-produit) qui soit bilinéaire par rapport à l'anneau de toutes les séries formelles à coefficients réels, associative et telles que $f * g = fg \bmod \lambda$ et $f * g - g * f = \lambda P(df, dg) \bmod \lambda^2$. La multiplication déformée $*$ prend la forme d'une série formelle $* = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r M_r$ où on demande en plus que les M_r soient des opérateurs bidifférentiels sur $C^\infty(M)$. Cette construction avait été motivée par les développements limités à $\lambda = i\hbar$ de la multiplication des opérateurs différentiels dans la mécanique quantique. Il est assez difficile de satisfaire la condition d'associativité de $*$ et une démonstration d'existence n'a été établie qu'en 1997 par M.Kontsevitch [4] pour toutes les variétés de Poisson. Une démonstration pour les variétés symplectiques avait été trouvée par M.DeWilde P.Lecomte en 1983 et par Fedosov en 1985; voir [3].

Le but de ce minicours est une introduction à cette théorie.

I. INTRODUCTION

Depuis l'article fondateur de Bayen, Flato, Frønsdal, Lichnerowicz et Sternheimer en 1978[7] la quantification par déformation est devenu un domaine de recherche assez vaste qui couvre plusieur domaines algébriques comme la théorie des déformations formelles des algèbres associatives et, plus récemment, la théorie des opérades, le domaine des variétés de Poisson qui inclut celui des variétés symplectiques et, également plus récemment, le domaine de physique de la théorie des cordes et la théorie des jauges noncommutative. Dans cette théorie, on regarde la multiplication noncommutative associative des opérateurs apparaissant dans la mécanique quantique comme une déformation formelle associative du produit point-par-point de l'algèbre des "symboles des ces opérateurs", ce qui veut dire en termes de physique l'algèbre des "quantités classiques", ce qui correspond à l'algèbre des toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs complexes sur une variété de Poisson, "l'espace des phases" de la mécanique classique. Le paramètre formel s'identifie à la constante de Planck $\hbar$ dans les situations convergentes. L'avantage de cette approche est son universalité: d'après un théorème de Kontsevitch[63] cette construction est possible pour toutes les variétés de Poisson. Ensuite, l'intuition géométrique "classique" sert beaucoup aux constructions concrètes parce que tout est formulé en termes géométriques d'une variété différentiable contrairement à l'approche de la mécanique quantique où il faut d'abord spécifier un espace de Hilbert. D'autre part, la quantification par déformation est formulée dans le cadre des séries formelles dont la convergence doit être réglée cas par cas.

Le but principal de ce minicours que j'ai donné lors de l'école dété de Safi au mois de juillet 2001 est une introduction plutôt pédagogique au sujet: ceci veut dire que je n'ai pas décrit en détail les démonstrations d'existence ou de classification qui sont très techniques. Je n'ai pas non plus inclu un aperçu de la théorie des opérades qui fournit le cadre algébrique de cette théorie depuis Kontsevitch. J'ai voulu plutôt souligner quelques motivations de physique de la théorie de quantification par déformation, discuter des exemples concrets et décrire les représentations en plus de détails.

Dans les premier deux chapitres, j'ai donné une petite esquisse des liens entre la mécanique classique et la géométrie symplectique et poissonienne et de la mécanique quantique usuelle. La motivation centrale pour l'apparition des multiplications déformées, les star-produits, sera le calcul symbolique des opérateurs différentiels en chapitre 3 pour plusieurs 'préscriptions d'ordre' d'une certaine significance de physique. J'ai inclu le chapitre 4 pour fixer la notation des séries formelles et citer une formule de déformation universelle, due à Gerstenhaber, à l'aide de laquelle on a une vue plus uniforme des star-produits introduits en chapitre 3. La définition et les théorèmes d'existence et de classification des star-produits se trouvent en chapitre 5. Quelques exemples explicites différents de $\mathbb{R}^{\not\models\ltimes}$ sont discutés en chapitre 6. Une première discussion des représentations des star-produits est faite en chapitre 7 où les analogues avec la théorie des algèbres stellaires (fonctions linéaires positives, construction GNS) sont discutées. Après une deuxième discussion de la géométrie de Poisson, à savoir des applications de Poisson et des applications et sous-variétés coïsotropes dans chapitre 8, j'ajoute une discussion speculative et quelques nouveaux résultats sur le problème ouvert de la déformation des applications de Poisson en tant que homorphismes d'algèbres associatives et de la déformation des sous-variétés coïsotropes en tant que représentations des star-produits.

Je me dois excuser d'avance pour la liste des références: je n'avais pas beaucoup de temps pour profondément rechercher tous les articles importants dans le domaine, alors je les ai ramassés d'une façon hâtive, même pas brassensienne (les copains d'abord), et je prie le lecteur de me pardonner des omissions et de regarder des résumés comme[81],[75] ou les comptes rendus de la conférence Moshé Flato 1999[35] pour plus de références.

II. MÉCANIQUE CLASSIQUE, GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET GÉOMÉTRIE DE POISSON

A. Mécanique classique

La mécanique classique est gouvernée par les *équations de Newton*: Le mouvement d'une particule de masse $m \in \mathbb{R}$ strictement positive dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est décrit par le système d'équations différentielles d'ordre 2 suivant:

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = F_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

où $x := (x_1, \ldots, x_n)$ désignent les n coordonnées de la particule et $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \to \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^2, le 'champ de force'. S'il y a plusieurs particules de masses strictement positives $m_1, \ldots, m_N$ le système (2.1) se généralise de façon évidente aux Nn coordonnées, à savoir $(x_{11}, \ldots, x_{nN}$ où le champ de force est maintenant une application $\mathbb{R}^{Nn} \supset U \to \mathbb{R}^{Nn}$ de classe C^2 où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{Nn}$. L'exemple canonique est le système solaire avec 10 particules, à savoir les neuf planètes et le soleil, où U est égal à $\mathbb{R}^{30}$ privé de tous les sous-espaces vectoriels décrivant toutes les situations où deux positions (dans $\mathbb{R}^3$) de deux particules distinctes coïncident, et F est le champ de force gravitationnelle de Newton. Ce dernier est un exemple d'un champ conservateur, c'est-à-dire pour lequel il existe une fonction (l'énergie potentielle) $V : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que F soit donnée par le gradient de V

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad \text{quel que soit } 1 \leq \text{i} \leq \text{n}. \tag{2.2}$$

L'idée principale de la mécanique Hamiltonienne est la transformation du système d'ordre 2 (2.1) à n variables en un système d'ordre 1 à $2n$ variables

$$(q,p) := (q^1,\ldots,q^n,p_1,\ldots,p_n) := (x_1,\ldots,x_n,m\frac{dx_1}{dt},\ldots,m\frac{dx_n}{dt}); \tag{2.3}$$

en introduisant la fonction de Hamilton (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle)

$$H(q,p) := \sum_{i=1}^{n}\frac{{p_i}^2}{2m} \; + \; V(q) \tag{2.4}$$

le système (2.1) se récrit de façon suivante ($1 \leq i \leq n$):

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{p_i}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q,p) =: X_{H\,q^i}(q,p) \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial q^i}(q) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q,p) =: X_{H\,p_i}(q,p) \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $X_H := (X_{H\,q}, X_{H\,p}) := (X_{H\,q^1},\ldots,X_{H\,q^n},X_{H\,p_1},\ldots,X_{H\,p_n}) : U\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ s'appelle le *champ hamiltonien associé à la fonction H*. Un tel champ peut être associé à une fonction arbitraire $H : U \to \mathbb{R}$. Il est évident que la fonction hamiltonienne H est une intégrale première du système (2.5), c.-à-d. $H\big(q(t),p(t)\big) = H\big(q(0),p(0)\big)$, ce qui correspond bien à la conservation de l'énergie. On appelle l'espace $\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}) := \{f : U \to \mathbb{R} | f\ \mathcal{C}^\infty\}$ l'ensemble des *observables classiques*. Les éléments $(q,p) \in U$ s'appellent les *états (purs)* du système.

B. Géométrie symplectique I

La géométrie symplectique est la généralisation directe des concepts locaux du paragraphe précédent.

Soit M une variété différentiable. Une 2-forme ω s'appelle *symplectique* si et seulement si elle est fermée (c.-à-d. $d\omega = 0$) et nondégénérée (c.-à-d. $\omega_m(X,Y) = 0$ quels que soient $m \in M$ et $Y \in T_mM$ implique $X = 0$), et le couple (M,ω) est dite *variété symplectique*. L'exemple standard est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$ (dont on rappellera les coordonnées canoniques $(q,p) := (q^1,\ldots,q^n,p_1,\ldots,p_n)$) muni de la forme

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i. \tag{2.6}$$

Pour une fonction de classe $Cinf$ $H : M \to \mathbb{R}$ on peut définir son *champ hamiltonien* X_H par

$$dH =: \omega(X_H,\ ) \tag{2.7}$$

ce qui est bien défini grâce à la nondégénérescence d'ω. En plus,

$$L_{X_H}\omega = di_{X_H}\omega + i_{X_H}d\omega = dd\omega + 0 = 0, \tag{2.8}$$

et chaque champ hamiltonien est une *symétrie infinitésimale* d'ω. Le triplet (M,ω,H) est appelé un *système hamiltonien* et la fonction H la *fonction hamiltonienne* du système. Les *équations de Hamilton* sont les équations différentielles suivantes

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_H\big(c(t)\big). \tag{2.9}$$

Le *théorème de Darboux* nous fournit des coordonnées particulières $(q,p) := (q^1,\ldots,q^n,p_1,\ldots,p_n)$ dans lesquelles la forme symplectique prend la forme (2.6), voir[1], p.175, thm 3.2.2. Le fait que la forme symplectique est antisymétrique implique immédiatement que la fonction hamiltonienne est toujours une *intégrale première* pour son système hamiltonien, c.-à-d.

$$\frac{dH\big(c(t)\big)}{dt} = dH\big(c(t)\big)X_H\big(c(t)\big) = \omega_{c(t)}\big(X_H\big(c(t)\big),X_H\big(c(t)\big)\big) = 0.$$

ce qui est conservation de l'énergie en physique.

On rappelle la définition du *crochet de Poisson* pour deux fonctions $f, g : M \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) = df\ X_g = -dg\ X_f. \tag{2.10}$$

et on a la proposition suivante:

Proposition II.1 *Soient $f, g, h : M \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété symplectique (M, ω). Alors:*

1. $\{f, g\} = -\{g, f\}$ *(antisymétrie).*
2. $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ *(dérivation).*
3. $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ *(identité de Jacobi).*
4. $[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$

Démonstration: Les deux premiers énoncés sont triviaux et le troisième suit du quatrième en l'applicant à la fonction h; ce dernier se déroule du fait que ω est fermée:

$$\begin{aligned} i_{[X_f, X_g]}\omega &= [L_{X_f}, i_{X_g}]\omega \overset{\text{eqn}(2.8)}{=} L_{X_f} i_{X_g}\omega = d i_{X_f} i_{X_g}\omega + i_{X_f} d i_{X_g}\omega \\ &\overset{d\omega=0}{=} d\{g, f\} + i_{X_f}(d i_{X_g} + i_{X_g} d)\omega \overset{\text{eqn}(2.8)}{=} -i_{X_{\{f,g\}}}\omega + 0. \end{aligned}$$

□

Alors le crochet de Poisson définit sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(M)$ la structure d'une algèbre de Lie.

Définition II.1 *Soit (M, ω) une variété symplectique. Une connection ∇ dans le fibré tangent TM s'appelle* symplectique *ssi*

$$\nabla_X \omega = 0 \quad \text{quel que soit le champ de vecteurs X sur M.}$$

La proposition suivante (selon Heß, Lichnerowicz, Tondeur, voir par exemple[55]) est un analogue au Théorème de Levi-Civita de la géométrie riemannienne bien que l'unicité de la connection symplectique sans torsion ne se répète pas:

Théorème II.1 *Soit (M, ω) une variété symplectique et $\tilde{\nabla}$ une connection sans torsion dans le fibré tangent TM de M.*
1. Alors la formule suivante définit une connection symplectique ∇ sans torsion dans TM:

$$\omega(\nabla_X Y, Z) := \omega(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \frac{1}{3}(\nabla_X \omega)(Y, Z) + \frac{1}{3}(\nabla_Y \omega)(X, Z)$$

quels que soient les champs de vecteurs X, Y, Z.
2. La différence entre deux connections symplectiques sans torsion ∇ et ∇' définit un champ de tenseurs S totalement symétrique de rang 3 dans $\Gamma(S^3T^*M)$ moyennant

$$\omega(\nabla'_X Y, Z) - \omega(\nabla_X Y, Z) =: S(X, Y, Z),$$

quels que soient les champs de vecteurs X, Y, Z sur M.
3. Pour tout champ de tenseurs S totalement symétrique de rang 3 dans $\Gamma(S^3T^*M)$ et toute connection symplectique sans torsion ∇ dans TM la connection ∇' définie par

$$\omega(\nabla'_X Y, Z) := \omega(\nabla_X Y, Z) + S(X, Y, Z),$$

quels que soient les champs de vecteurs X, Y, Z sur TM, est une connection symplectique sans torsion dans TM.

La démonstration est un calcul direct.

Pour qu'une variété différentiable compacte admette une structure symplectique il faut des conditions topologiques: la classe de toute $2k$-forme fermée $\omega^{\wedge k}$, $1 \leq k \leq n := \dim M$ est toujours non nulle, car s'il existait une $k-1$-forme θ telle que $\omega^{\wedge k} = d\theta$, alors la forme volume $\omega^{\wedge n}$ serait égale à $d\theta \wedge \omega^{\wedge(n-k)} = d(\theta \wedge \omega^{\wedge(n-k)})$ ce qui serait absurde puisque son volume $\int_M \omega^{\wedge n}$ s'annulerait. Par exemple les sphères S^{2n} n'admettent pas de structure symplectique quel que soit $n \geq 2$.

1. Fibrés cotangents

Soit Q une variété différentiable arbitraire, T^*Q son fibré cotangent et $\tau_Q^* : T^*Q \to Q$ la projection canonique du fibré. La 1-forme canonique θ_0 sur la variété T^*Q est définie de la forme suivante: soit $q \in Q$, $\alpha \in T_qQ^*$ et $W_\alpha \in T_\alpha T^*Q$, alors

$$\theta_0(\alpha)\big(W_\alpha\big) := \alpha\big(T_\alpha\tau_Q^*\; W_\alpha\big). \tag{2.11}$$

Si $\big((U, (q^1, \ldots, q^n)\big)$ est une carte de Q, et $\big(T^*U, (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)\big)$ une carte canonique de T^*Q (c.-à-d. $q^k(\alpha) := q^k\big(\tau_Q^*(\alpha)\big)$ et $p_l(\alpha) := \alpha(\partial/\partial q^l)$) alors θ_0 prend la forme

$$\theta_0 := \sum_{k=1} p_k dq^k \tag{2.12}$$

d'où le fait que la 2-*forme canonique*

$$\omega_0 := -d\theta_0 \tag{2.13}$$

est nondégénérée, alors une forme symplectique sur T^*Q. Les fibrés cotangents généralisent les espaces des phases des physiciens où Q est l'espace des configurations et les fibres représentent les quantités de mouvement conjuguées.

2. L'espace projectif complexe

On considère la variété $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ munie des coordonnées complexes $z := (z_1 := q_1 + ip_1, \ldots, z_{n+1} := q_{n+1} + ip_{n+1})$ et de la forme symplectique

$$\omega_0 := \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n+1} dz_k \wedge d\bar{z}_k = \sum_{k=1}^{n+1} dq_k \wedge dp_k. \tag{2.14}$$

L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est défini par la relation d'équivalence

$$z \sim z' \text{ si et seulement si } \exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ tel que } \mathrm{z}' = \alpha \mathrm{z}, \tag{2.15}$$

donc $\mathbb{C}P^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$. Soit

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n : z \mapsto [z] \tag{2.16}$$

la projection canonique dont les fibres sont visiblement les droites complexes dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ passant par l'origine. Il y a $n+1$ cartes complexes (U_k, v) définies par

$$\begin{aligned} U_k &:= \{[z] \in \mathbb{C}P^n | z_k \neq 0\} \\ v &:= \left(v_1 := \frac{z_1}{z_k}, \ldots, v_{k-1} := \frac{z_{k-1}}{z_k}, v_{k+1} := \frac{z_{k+1}}{z_k}, \ldots, v_{n+1} := \frac{z_{n+1}}{z_k}\right). \end{aligned}$$

La *forme de Fubini-Study* ω est définie de la forme suivante dans la chaque carte (U_k, v) (où on note $|v|^2 := \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n+1} |v_l|^2$):

$$\omega|_{U_k} := \frac{i}{2(1+|v|^2)}\left(\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n+1} dv_l \wedge d\bar{v}_l - \frac{1}{(1+|v|^2)}\sum_{\substack{l,l'=1,\\ l,l'\neq k}}^{n+1} \bar{v}_l dv_l \wedge v_{l'} d\bar{v}_{l'}\right) \tag{2.17}$$

On peut montrer que ω est une forme symplectique bien-définie. En outre, l'application

$$\Phi : \mathbb{C}P^1 \to S^2 : [z_1, z_2] \mapsto \frac{1}{|z_1|^2 + |z_2|^2}\big(z_1 z_2 + \bar{z}_1\bar{z}_2, -i(z_1 z_2 - \bar{z}_1\bar{z}_2), |z_1|^2 - |z_2|^2\big)$$

est un difféomorphisme.

C. Géométrie de Poisson I

La géométrie de Poisson est une généralisation de la géométrie symplectique dans le sens suivant:

Soit M und variété différentiable et $H : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si l'on voudrait définir un champ de vecteurs associé à H qui dépend linéairement de dH et pour lequel H est une intégrale première on a besoin d'un *champ de bivecteurs* P, c.-à-d. d'une section de classe $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $\Lambda^2 TM$. Dans une carte locale $\big(U, (x^1, \ldots, x^n)\big)$ P prendra la forme

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} P^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{2.18}$$

Le *rang d'un champ de bivecteurs* P en $m \in M$ est défini par le rang de la matrice $P^{ij}(m)$ dans une carte arbitraire.

Tout champ de bivecteurs peut être regardé de manière canonique comme une forme bilinéaire antisymétrique sur le fibré cotangent T^*M en utilisant l'accouplement naturel: soient α, β deux 1-formes sur M

$$P(\alpha, \beta) = i_\beta i_\alpha P = \sum_{i,j=1}^{n} P^{ij} \alpha_i \beta_j \tag{2.19}$$

Avec une telle section on définit le champ hamiltonien X_H de façon analogue à (2.7):

$$X_H := P(\ , dH) = \sum_{i,j=1}^{n} P^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.20}$$

On voit facilement que H est toujours une intégrale première du système dynamique défini par X_H. En outre, on pourrait définir un *crochet de Poisson* pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ analoguement à (2.10) par

$$\{f, g\} := P(df, dg) = df\ X_g = -dg\ X_f. \tag{2.21}$$

En général, l'analogue de la proposition II.1 n'est plus vrai quant à l'identité de Jacobi. Pour étudier celle-ci on introduit la structure suivante sur les sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ du fibré ΛTM, les *champs de multivecteurs*:

1. Crochet de Schouten

Définition II.2 *Soient $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_l$ des champs de vecteurs sur M et $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. On définit le* crochet de Schouten[1] *sur M par:*

$$\begin{aligned}
&[X_1 \wedge \cdots \wedge X_k, Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_l] := \\
&\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_{i-1} \wedge X_{i+1} \wedge \cdots \wedge X_k \\
&\qquad\qquad\qquad \wedge Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{j-1} \wedge Y_{j+1} \wedge \cdots \wedge Y_l, \\
&[X_1 \wedge \cdots \wedge X_k, f] := \\
&\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} X_i(f) X_1 \wedge \cdots \wedge X_{i-1} \wedge X_{i+1} \wedge \cdots \wedge X_k \\
&=: -(-1)^{k-1} [f, X_1 \wedge \cdots \wedge X_k], \\
&[f, g] := 0
\end{aligned}$$

[1]La prononciation est "S-khaouteune".

A l'aide de la proposition suivante on voit que ce crochet ne dépend pas de la décomposition en champs de vecteurs:

Proposition II.2 *Soit ∇ une connection sans torsion dans le fibré tangent de M, soient $X \in \Gamma(\Lambda^k TM)$ et $Y \in \Gamma(\Lambda^l TM)$ et soit $\big(U, (x^1, \ldots, x^n)\big)$ une carte.*
Alors le crochet de Schouten se calcule par la formule suivante

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k-1} i_{dx^i}(X) \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y$$
$$- (-1)^{(k-1)(l-1)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{l-1} i_{dx^i}(Y) \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X$$

qui ne dépend ni de la carte ni de la connection sans torsion choisies.

L'espace des champs de multivecteurs, $\Gamma(\Lambda TM)$, muni du crochet de Schouten, est une *superalgèbre de Lie*, c.-à-d.:

Proposition II.3 *Soient $X \in \Gamma(\Lambda^k TM)$, $Y \in \Gamma(\Lambda^l TM)$ et $Z \in \Gamma(\Lambda^r TM)$. Alors:*

1. $[X,Y] = -(-1)^{(k-1)(l-1)}[Y,X]$.
2. $[X, Y \wedge Z] = [X,Y] \wedge Z + (-1)^{(k-1)l} Y \wedge [X,Z]$.
3. $(-1)^{(k-1)(r-1)}[[X,Y],Z] + (-1)^{(l-1)(k-1)}[[Y,Z],X] + (-1)^{(r-1)(l-1)}[[Z,X],Y] = 0.$

La démonstration est un calcul direct.

2. Structures de Poisson

Définition II.3 *Un champ de bivecteurs P s'appelle une* structure de Poisson *si et seulement si*

$$[P,P] = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{n}} \left(\frac{\partial \mathrm{P^{ij}}}{\partial \mathrm{x^r}} \mathrm{P^{rk}} + \frac{\partial \mathrm{P^{jk}}}{\partial \mathrm{x^r}} \mathrm{P^{ri}} + \frac{\partial \mathrm{P^{ki}}}{\partial \mathrm{x^r}} \mathrm{P^{rj}} \right) = 0$$

Le couple (M,P) d'une variété munie d'une structure de Poisson s'appelle une variété de Poisson*.*

Les deux propositions suivantes se démontrent par calcul direct:

Proposition II.4 *Soit P un champ de bivecteurs sur M. Le crochet de Poisson défini par (2.21) satisfait l'identité de Jacobi si et seulement si P est une structure de Poisson.*

Proposition II.5 *Soient (M,P) et (M',P') deux variétés de Poisson et $s,t \in \mathbb{R}$. Moyennant l'identification $T_{(m,m')}(M \times M') = T_m M \times T_{m'} M'$ quels que soient $m \in M$ et $m' \in M'$ et les injections canoniques $i_{(m,m')} : T_m M \to T_m M \times T_{m'} M' : v \mapsto (v,0)$ et $i'_{(m,m')} : T_{m'} M' \to T_m M \times T_{m'} M' : w \mapsto (0,w)$ on écrit $P_{(1)}(m,m') := (i_{(m,m')} \otimes i_{(m,m')})(P_m)$ et $P'_{(2)}(m,m') := (i'_{(m,m')} \otimes i'_{(m,m')})(P'_{m'})$.*
Alors $sP_{(1)} + tP'_{(2)}$ est une structure de Poisson sur la variété produit $M \times M'$.

L'exemple canonique est $\mathbb{R}^{2n}$ muni du crochet de Poisson symplectique

$$P := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q^k} \wedge \frac{\partial}{\partial p_k} \tag{2.22}$$

Contrairement au cas d'une variété symplectique où l'existence d'une structure symplectique restreint la topologie de la variété il n'est plus vrai qu'une structure de Poisson non nulle influence la nature globale de la variété:

Théorème II.2 *: Soit M une variété différentiable de dimension $n \geq 2$, p un point de M et $k \leq E(n/2)$ (la partie entière de $n/2$).*
Alors il existe une structure de Poisson P sur M dont le rang est égal à $2k$ au point p.

Démonstration: (C.Nowak, J.Schirmer, 1996). On note d'abord que dans $\mathbb{R}^n$ les champs de vecteurs $Z_1, \ldots, Z_n$ suivants sont indépendants à l'origine, à support compact et commutent deux-à-deux:

$$Z_j(x) := \phi_j(x_1) \cdots \phi_j(x_{j-1})\phi_1(x_j)\phi_{j+1}(x_{j+1})\phi_{j+2}(x_{j+2}) \cdots \phi_n(x_n)\frac{\partial}{\partial x_j}$$
$$\forall\ 1 \leq j \leq n$$

où $\phi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui s'annule pour $|x| \geq j$ et est égale à 1 pour $|x| \leq j-(1/2)$. A l'aide d'une carte (U, ψ) de M on les retire sur la variété et les prolonge par zéro en dehors de U. Ces champs de vecteurs commutent toujours. En suite, on choisit parmi ces champs sur la variété $2k$ champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_k$, $Y_1, \ldots, Y_k$ indépendants à l'origine de la carte (au point qui est envoyé sur l'origine de $\mathbb{R}^n$ par ψ). Alors, la combinaison

$$P := \sum_{i=1}^{k} X_i \wedge Y_i$$

est évidemment une structure de Poisson de rang $2k$ à l'origine de la carte. □

3. L'espace dual d'une algèbre de Lie

Un autre exemple très important s'obtient en considérant l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ réelle de dimension finie n: soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathfrak{g}$, $e^1, \ldots, e^n$ la base duale et $c_{lm}^k := e^k([e_l, e_m])$ les constantes de structure de $\mathfrak{g}$, alors pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$

$$P_{\mathfrak{g}}(\xi) := \xi([\ ,\ ]) = \frac{1}{2}\sum_{k,l,m=1}^{n} \xi_k c_{lm}^k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \wedge \frac{\partial}{\partial \xi_l}. \tag{2.23}$$

L'identité de Jacobi pour ce crochet de Poisson est une conséquence directe de l'identité de Jacobi pour le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$.

III. MÉCANIQUE QUANTIQUE

Dans la mécanique quantique, le tableau classique des observables, des états et des lois de mouvement est remplacé par des structures plus compliquées, selon la philosophie suivante: d'après de Broglie toute particule (comme, par exemple, un électron) a toujours l'aspect d'une onde, et il associe à son énergie E la formule de Planck $E = \hbar\omega$ où ω est la fréquence de l'onde et $\hbar$ la constante de Planck, et à sa quantité de mouvement p le vecteur $\hbar k$ où la longueur du vecteur k est donnée par $2\pi/\lambda$, λ étant la longueur d'onde de l'onde. Une particule libre (pour laquelle l'énergie potentielle V s'annule) est décrite par une onde plane

$$(t, q) \mapsto \psi(t, q) = \exp(-i\omega t + ik \cdot q) \tag{3.1}$$

où $k \cdot q := \sum_{j=1}^{n} k_j q_j$. La fonction d'onde ψ est évidemment une solution de l'équation

$$E\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = \frac{p^2}{2m}\psi$$

où $\Delta := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial q_j^2}$ est l'opérateur de Laplace et $p^2 := p \cdot p$. Schrödinger a généralisé cette équation pour inclure des forces par son *équation de Schrödinger*

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, q) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t, q) + V(q)\psi(t, q) =: \big(\hat{H}\psi\big)(t, q) \tag{3.2}$$

où l'opérateur différentiel $\hat{H}$ s'appelle *opérateur hamiltonien* du système par son analogie évidente avec la fonction hamiltonienne H. Cette description de Schrödinger avait un grand succès pour l'atome d'hydrogène pour lequel $V(q) = -\alpha/|q|$, α étant une constante: l'ensemble des valeurs propres de $\hat{H}$ correspondait exactement au spectre mesuré. Ici, $\hat{H}$ est considéré comme un opérateur autoadjoint, défini sur un domaine dense $D(\hat{H})$ dans *l'espace de Hilbert* $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^3, d^3q)$. Les (classes des) fonctions d'onde dans $\mathcal{H}$ –à un multiple complexe près– sont interprétées comme des *états purs* du système quantique, c.-à-d. elles donnent déjà une description complète du système. Le carré du module de ψ, $|\psi|^2$, est considéré comme une *distribution de probabilité* pour la position au cas où la norme de ψ vaut 1. Evidemment, la fonction d'onde pour la particule libre ne fait pas partie de $\mathcal{H}$: vue comme distribution tempérée (au sens de Laurent Schwartz) elle s'obtient par approximation avec des éléments de $\mathcal{H}$, le dernier espace étant dense dans l'espace de distributions. En général, comme déjà dans la mécanique classique, on peut considérer d'autres *observables quantiques* comme par exemple la *position*

$$Q_k : \psi \mapsto \big(q \mapsto q_k\psi(q)\big) \tag{3.3}$$

ou *l'impulsion* (qui est proportionelle à la vitesse pour les systèmes non relativistes)

$$P_l : \psi \mapsto \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial q_l}, \tag{3.4}$$

en général tous les opérateurs autoadjoints A définis sur un domaine de définition $D(A) \subset \mathcal{H}$ dense (pour lesquels on a une bonne définition du spectre). Un espace d'observables mathématiquement plus commode est $B(\mathcal{H})$, l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés : $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Heisenberg observa que l'effet de dispersion d'une onde se traduit dans la fameuse *relation d'incertitude* entre la position et l'impulsion. Il en déduisit que les seules valeurs que l'on puisse mesurer dans une expérience sans aucune déviation sont les valeurs propres (plus général: les valeurs spectrales) de l'opérateur hamiltonien.

On a le tableau suivant:

Eléments	MECANIQUE CLASSIQUE	MECANIQUE QUANTIQUE
Ensemble des états purs	variété de Poisson (M, P) (ou symplectique)	espace projectif d'un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$
Ensemble des observables	$\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$	{opérat. autoadj. de $\mathcal{H}$}
Structure algébrique des observables	algèbre de Poisson	algèbre associative $B(\mathcal{H})$
Générateur d'un système dynamique concrèt	fonction hamiltonienne $H : M \to \mathbb{R}$	opérateur hamiltonien $\hat{H} : D(\hat{H}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
Equation de mouvement	equation de Hamilton: $\frac{dc}{dt} = X_H(c)$	equation de Schrödinger: $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$
Valeur d'une observable dans un état	valeur réelle de la fonction f en m, $f(m)$	valeur moyenne de A dans ψ, $\langle A\rangle_\psi := \langle\psi, A\psi\rangle/\langle\psi,\psi\rangle$
Valeur d'une observable exactement mesurable	valeur réelle de la fonction f en m, $f(m)$	valeur spectrale de A
2 systèmes: {états}	variété produit $(M_1 \times M_2, P_{(1)} + P_{(2)})$	espace projectif du produit tensoriel $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$
2 systèmes: {observables}	$\mathcal{C}^\infty(M_1, \mathbb{R}) \hat{\otimes} \mathcal{C}^\infty(M_2, \mathbb{R})$	$B(\mathcal{H}_1) \hat{\otimes} B(\mathcal{H}_2)$

Les difficultés de l'interprétation de la mécanique quantique prennent leur origine dans le fait que la combinaison des ensembles des états de deux systèmes (par exemple le système mesuré et le système décrivant l'appareil de la mesure), à savoir l'espace projectif du produit *tensoriel* des deux espaces de Hilbert, contient plus d'états que des états dits *séparés* qui sont contenus dans le produit cartésien des deux espaces projectifs: par exemple, si $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^{m+1}$ et $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^{n+1}$, alors $\mathbb{C}P(m) \times \mathbb{C}P(n)$ est une sous-variété de dimension réelle $2(m+n)$ de l'espace projectif $\mathbb{C}P\big((m+1)(n+1)-1\big)$ (application de Segre en géométrie algébrique). Ces états additionnels sont toujours présents pour toute interaction non triviale entre ces deux systèmes et furent appelés "états enchevêtrés" (*verschränkte Zustände* en allemand) par Schrödinger. Si la combinaison des deux systèmes est dans un état enchevêtré il n'est plus possible de dire que "système 1 est dans l'état 1 et système 2 est dans l'état 2" comme dans la mécanique classique où l'ensemble des états est toujours un produit cartésien. Contrairement à l'ensemble des états, il n'y a plus de différence conceptuelle entre les ensembles des observables pour la combinaison des deux systèmes: pour les deux cas, c'est le produit tensoriel (topologique) des deux algèbres. Pour cette raison, il me semble plus raisonnable de considérer les observables comme objets plus fondamentaux que les états –contrairement aux approches historiques et plus intuitives de la physique, mais en accord avec les mathématiques des algèbres stellaires (C^*-algèbres). Pour une discussion détaillée des problèmes d'interprétation de la mécanique quantique voir par exemple le livre de d'Espagnat[30].

IV. CALCUL SYMBOLIQUE ET STAR-PRODUITS ÉLÉMENTAIRES

Afin de décrire un système quantique il faut d'abord connaître son opérateur hamiltonien $\hat{H}$. Normalement, la source de l'inspiration est la fonction hamiltonienne du système de la mécanique classique, et une recette de 'traduire' une fonction hamiltonienne en un opérateur hamiltonien s'appelle *quantification.*

Selon P.A.M. Dirac, toutes les quantifications doivent satisfaire la condition de la *limite classique*, c.-à-d. quels que soient les observables classiques f, g

$$\hat{f}\hat{g} = \widehat{fg} + o(\hbar) \tag{4.1}$$

$$\hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f} = i\hbar\widehat{\{f,g\}} + o(\hbar^2) \tag{4.2}$$

Dans ce paragraphe, on va discuter quelques quantifications possibles. On rappelle les opérateurs différentiels Q (3.3) et P (3.4) dans le cas où $n = 1$: $(Q\psi)(q) := q\psi(q)$ et $P := (\hbar/i)\partial/\partial q$.

Dans les sections qui suivront, on note $\mathbb{C}[s_1, \ldots, s_N]$ pour l'espace des polynômes complexes dans les N variables $s_1, \ldots, s_N$. En outre le symbole $\mathrm{Diffop}_{\mathrm{poly}}(\mathbb{R})$ désigne l'espace de tous les *opérateurs différentiels* à coefficients polynomiaux dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, c.-à-d. un élément D prend la forme suivante

$$\sum_{k=0}^{N} f_k \partial^k/\partial q^k \tag{4.3}$$

où $f_1, \ldots, f_N \in \mathbb{C}[q]$.

A. Ordre standard

On considère l'application linéaire ρ_s suivante de l'espace des polynômes complexes à deux variables $\mathbb{C}[q,p]$ dans l'espace $\mathrm{Diffop}_{\mathrm{poly}}(\mathbb{R})$:

$$1 \mapsto \rho_s(1) := 1 \tag{4.4}$$

$$q \mapsto \rho_s(q) := Q \tag{4.5}$$

$$p \mapsto \rho_s(p) := P \tag{4.6}$$

$$q^m p^n \mapsto \rho_s(q^m p^n) := Q^m P^n \tag{4.7}$$

Vu que tout opérateur différentiel dans $\mathrm{Diffop}_{\mathrm{poly}}(\mathbb{R})$ prend la forme (4.3) il est évident que cette application linéaire est une bijection. L'idée principale des star-produits est de tirer en arrière la multiplication des opérateurs différentiels par l'application ρ_s:

Proposition IV.1 *Soient $f, g \in \mathbb{C}[q,p]$ et $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors*

$$\rho_s(f)\big(\phi\big) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\hbar/i)^r}{r!} \left.\frac{\partial^r f}{\partial p^r}\right|_{p=0} \frac{\partial^r \phi}{\partial q^r}. \tag{4.8}$$

En outre

$$f *_s g := \rho_s^{-1}\big(\rho_s(f)\rho_s(g)\big) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\hbar/i)^r}{r!} \frac{\partial^r f}{\partial p^r}\frac{\partial^r g}{\partial q^r}$$

est une multiplication associative noncommutative bien définie sur l'espace $\mathbb{C}[q,p]$ qui satisfait la limite classique

$$f *_s g = fg - i\hbar \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} + o(\hbar^2).$$

Démonstration: La démonstration est un calcul direct; puisque $*_s$ est évidemment isomorphe à la multiplication associative des opérateurs différentiels, alors la multiplication $*$ l'est aussi. □

On note que pour deux polynômes concrets f, g la serie en $\hbar$ est toujours une somme finie. En outre, chaque terme de cette série est un *opérateur bidifférentiel* $\frac{(1/i)^r}{r!}\frac{\partial^r f}{\partial p^r}\frac{\partial^r g}{\partial q^r}$.

B. Ordre de Weyl-Moyal

Du point de vue de physique, l'ordre standard n'est pas encore suffisant: quand on considère l'espace préhilbertien

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ et supp(f) est compact}\} \tag{4.9}$$

muni du produit scalaire (quelles que soient $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$):

$$\langle \phi, \psi \rangle := \int dq\ \overline{\phi(q)}\psi(q) \tag{4.10}$$

on voit rapidement que les deux fonctions réelles q et p correspondent à des *opérateurs symmétriques*, c.-à-d. pour $A = Q$ ou $A = P$

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \langle A\phi, \psi \rangle, \tag{4.11}$$

tandis que la fonction réelle qp correspond à l'opérateur QP dont l'adjoint dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est égal $PQ = QP - i\hbar 1$: alors $\rho_s(qp)$ n'est plus symétrique ce qui serait nécessaire pour le rendre autoadjoint dans la complétion $L^2(\mathbb{R}, dq)$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Afin d'éviter ces problèmes-là, on a introduit *l'ordre de Weyl-Moyal* qui utilise une symétrisation des monômes en Q et P:

On considère l'application linéaire ρ_w suivante de l'espace des polynômes complexes à deux variables $\mathbb{C}[q,p]$ dans l'espace $\mathrm{Diffop}_{\mathrm{poly}}(\mathbb{R})$:

$$1 \mapsto \rho_w(1) := 1 \tag{4.12}$$

$$q \mapsto \rho_w(q) := Q \tag{4.13}$$

$$p \mapsto \rho_w(p) := P \tag{4.14}$$

$$q^m p^n \mapsto \rho_s(q^m p^n) := \frac{1}{(m+n)!} \sum_{\sigma \in S_{m+n}} A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(m+n)} \tag{4.15}$$

où les opérateurs $A_1, \cdots, A_{m+n}$ sont donnés par

$$A_k := \begin{cases} Q & \text{si } 1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{m} \\ P & \text{si } \mathrm{m}+1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{m}+\mathrm{n} \end{cases}$$

Par exemple, $\rho_w(qp) = (QP+PQ)/2$ et $\rho_w(q^2p) = (Q^2P+QPQ+PQ^2)/3$. Par définition, les opérateurs $\rho_w(f)$ sont symétriques si f est réel, parce qu'on calcule facilement que

$$\rho_w(f)^\dagger = \rho_w(\bar{f})$$

où $A^\dagger$ est l'opérateur adjoint de A dans $\big(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle\big)$.

Pour deux paramètres formels α, β la fonction exponentielle $\exp(\alpha q+\beta p)$ a l'image $\rho_w\big(\exp(\alpha q+\beta p)\big) = \exp(\alpha Q + \beta P)$. En utilisant le fait que $\rho_s\big(\exp(\alpha q+\beta p)\big) = \exp(\alpha Q)\exp(\beta P)$, le fait que $[Q,P] = i\hbar 1$ et la formule de Baker, Campbell et Hausdorff, on calcule

$$e^{(\alpha Q+\beta P)} = e^{\frac{\hbar\alpha\beta}{2i}} e^{\alpha Q} e^{\beta P}.$$

Vu que la fonction exponentielle $\exp(\alpha q+\beta p)$ est une fonction génératrice pour tous les polynômes en q,p on voit bien que l'on a la relation fondamentale suivante entre l'ordre standard et l'ordre de Weyl-Moyal:

$$\rho_w(f) = \rho_s(Nf) \tag{4.16}$$

où l'application $N : \mathbb{C}[q,p] \to \mathbb{C}[q,p]$ est définie par

$$N := e^{\frac{\hbar}{2i}\frac{\partial^2}{\partial q \partial p}}. \tag{4.17}$$

Il est clair que N est bien définie et inversible, et l'on en déduit que $\rho_w : \mathbb{C}[q,p] \to \mathrm{Diffop}_{\mathrm{poly}}(\mathbb{R})$ est une bijection linéaire. On a la proposition suivante analogue à Prop. IV.1:

Proposition IV.2 *Soient $f, g \in \mathbb{C}[q,p]$. Alors*

$$f *_w g := \rho_w^{-1}\big(\rho_w(f)\rho_w(g)\big) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i\hbar/2)^r}{r!} \sum_{a=0}^{r} \binom{r}{a} (-1)^{r-a} \frac{\partial^r f}{\partial q^a p^{r-a}} \frac{\partial^r g}{\partial q^{r-a} p^a} \tag{4.18}$$

est une multiplication associative noncommutative bien définie sur l'espace $\mathbb{C}[q,p]$ qui satisfait la limite classique

$$f *_w g = fg + \frac{i\hbar}{2}\{f,g\} + o(\hbar^2).$$

et est isomorphe à $*_s$ via N:

$$N(f *_w g) = (Nf) *_s (Ng).$$

Démonstration: La démonstration est un calcul direct où l'on utilise l'opérateur N. □

Cette fois aussi, on voit que $*_w$ se compose des opérateurs bidifférentiels.

C. Ordre de Wick

Il y a une troisième quantification liée à l'oscillateur harmonique dont on se sert beaucoup dans la théorie des champs quantiques: on forme d'abord la variable complexe

$$z := q + ip. \tag{4.19}$$

Sur l'espace

$$\bar{\mathcal{O}}(\mathbb{C}) := \{\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} | \phi \text{ antiholomorphe }\}$$

on définit le produit scalaire suivant

$$\langle \phi, \psi \rangle := \frac{1}{4\pi\hbar} \int dz d\bar{z} e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}} \overline{\phi(\bar{z})} \psi(\bar{z}) \tag{4.20}$$

(qui peut encore diverger), et finalement l'espace hilbertien des fonctions antiholomorphes L^2

$$\mathcal{H} := \{\phi \in \bar{\mathcal{O}}(\mathbb{C}) | \langle \phi, \phi \rangle < \infty\}, \tag{4.21}$$

qui est un sous-espace fermé de l'espace $L^2\big(\mathbb{R}^2, e^{-(q^2+p^2)/(2\hbar)}dqdp/(2\pi\hbar)\big)$. L'espace des polynômes dans la variable $\bar{z}$, $\mathbb{C}[\bar{z}]$, est un sous-espace dense de $\mathcal{H}$. Par intégration par parties on déduit que l'opérateur A qui multiplie par la variable z induit *l'opérateur d'annihilation*

$$A := 2\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tag{4.22}$$

sur $\mathbb{C}[\bar{z}]$. Par une deuxième intégration par partie sur $\mathbb{C}[\bar{z}]$ on voit que son adjoint $A^\dagger$ (*l'opérateur de création*) est l'opérateur

$$(A^\dagger \phi)(\bar{z}) := \bar{z}\phi(\bar{z}) \tag{4.23}$$

Par conséquent, de façon complètement analogue à l'ordre standard on considère l'application linéaire ρ_{wick} suivante de l'espace des polynômes complexes à deux variables $\mathbb{C}[z, \bar{z}]$ dans l'espace $\mathrm{Diffop}_{\mathrm{poly}}(\bar{z})$ de tous les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux dans l'espace des polynômes $\mathbb{C}[\bar{z}]$:

$$1 \mapsto \rho_{wick}(1) := 1 \tag{4.24}$$

$$z \mapsto \rho_{wick}(z) := A \tag{4.25}$$

$$\bar{z} \mapsto \rho_{wick}(\bar{z}) := A^\dagger \tag{4.26}$$

$$\bar{z}^m z^n \mapsto \rho_{wick}(\bar{z}^m z^n) := A^{\dagger m} A^n \tag{4.27}$$

Il est évident que cette application linéaire est une bijection.

Proposition IV.3 *Soient $f, g \in \mathbb{C}[q,p]$ et $\phi \in \mathbb{C}[\bar{z}]$. Alors*

$$\rho_{wick}(f)\big(\phi\big) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\hbar)^r}{r!} \left.\frac{\partial^r f}{\partial z^r}\right|_{z=0} \frac{\partial^r \phi}{\partial \bar{z}^r}.$$

En outre

$$f *_{wick} g := \rho_{wick}^{-1}\big(\rho_{wick}(f)\rho_{wick}(g)\big) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\hbar)^r}{r!} \frac{\partial^r f}{\partial z^r} \frac{\partial^r g}{\partial \bar{z}^r}$$

est une multiplication associative noncommutative bien définie sur l'espace $\mathbb{C}[q,p]$ qui satisfait la limite classique

$$f *_s g = fg + 2\hbar \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + o(\hbar^2).$$

Démonstration: La démonstration est complètement analogue à celle de la proposition IV.1. On note que

$$\frac{\partial}{\partial q} \wedge \frac{\partial}{\partial p} = \frac{2}{i}\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

□

Comme pour l'ordre standard et l'ordre de Weyl il y a aussi un analogue pour l'opérateur N (4.17): on définit

$$\Delta' := \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\partial^2}{\partial p^2}$$

et

$$N' := e^{\frac{\hbar}{4}\Delta'}.$$

Alors, pour tous $f, g \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$:

$$N'(f *_w g) = (N'f) *_{wick} (N'g).$$

Remarque: La considération des fonctions antiholomorphes au lieu des fonctions holomorphes est une tradition des physiciens: la création (augmentation du degré d'un ploynôme) est liée à $A^\dagger$.

V. DÉFORMATIONS FORMELLES

A. Séries formelles

Dans ce paragraphe je rappellerai quelques notions élémentaires des *séries formelles* dont j'aurai besoin plus tard; pour plus de renseignements voir par exemple[74]. Soit R un anneau (par exemple un corps) et M un module gauche sur R (par exemple un R-espace vectoriel). On écrit une application $a : Nature(London) \to M$ sous la forme d'une *série formelle à coefficients dans M*

$$a =: \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r a_r$$

où $a_r := a(r)$ et le symbole λ s'appelle *paramètre formel*. L'ensemble des toutes les séries formelles à coefficients dans M se note $M[[\lambda]]$. Les ensembles $M[[\lambda]]$ et $R[[\lambda]]$ sont des groupes abéliens de façon canonique ($b = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r b_r$ où $b_r \in M$):

$$a + b := \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r (a_r + b_r).$$

En outre, $R[[\lambda]]$ devient un anneau moyennant ($\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \alpha_r, \beta = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \beta_r,\ \alpha_r, \beta_r \in R$)

$$\alpha\beta := \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \sum_{s=0}^{r} \alpha_s \beta_{r-s}$$

et $M[[\lambda]]$ devient un $R[[\lambda]]$-module gauche moyennant

$$\alpha b := \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \sum_{s=0}^{r} \alpha_s b_{r-s}.$$

On définit *l'ordre* d'une série formelle a, $o(a)$, par le minimum de l'ensemble de tous les entiers positifs r tels que $a_r \neq 0$ quand $a \neq 0$ et $+\infty$ si $a = 0$. On peut démontrer que la fonction

$$d : M[[\lambda]] \times M[[\lambda]] \to \mathbb{R} : (a, b) \mapsto d(a, b) := \begin{cases} 2^{-o(a-b} & \text{si a} \neq \text{b} \\ 0 & \text{si a} = \text{b} \end{cases}$$

est une métrique sur $M[[\lambda]]$ qui y induit une topologie séparée qui s'appelle la *topologie λ-adique* de $M[[\lambda]]$.

Le lemme suivant est très utile:

Lemme V.1 *Soient M_1 et M_2 deux R-modules et $\Phi : M_1[[\lambda]] \to M_2[[\lambda]]$ une application $R[[\lambda]]$-linéaire. Alors il y a des applications R-linéaires $\Phi_r : M_1 \to M_2$ quel que soit $r \in Nature(London)$ telles que*

$$\Phi(a) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \sum_{s=0}^{r} \Phi_s(a_{r-s})$$

quel que soit $a = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r a_r \in M_1[[\lambda]]$.

Démonstration: La restriction de Φ à M_1 est une application R-linéaire dans $M_2[[\lambda]]$. Les composantes de cette application sont des applications R-linéaires $\Phi_r : M_1 \to M_2$. Le membre droit de l'énoncé que l'on appelle $\hat{\Phi}$ est une application $R[[\lambda]]$-linéaire de $M_1[[\lambda]]$ dans $M_2[[\lambda]]$. Par sa définition, la différence $\Phi - \hat{\Phi}$ s'annule sur toutes les séries formelles dont les coefficients nonnuls forment un ensemble fini. Supposons qu'il existe une série formelle $a \in M_1[[\lambda]]$ telle que $b := (\Phi - \hat{\Phi})(a)$ ne soit pas égale à 0. Soit k l'ordre de b. Puisque $b = (\Phi - \hat{\Phi})(a - a_0 - \lambda^1 a_1 - \cdots - \lambda^k a_k)$ et $a - a_0 - \lambda^1 a_1 - \cdots - \lambda^k a_k =: \lambda^{k+1} a'$ il s'ensuivrait que l'ordre de b serait supérieur ou égal à $k + 1$ ce qui serait absurde. Par conséquent, $\Phi = \hat{\Phi}$ et le lemme est démontré. □

Quand l'anneau R est commutatif on peut aisément généraliser ce lemme au cas des applications R-multilinéaires.

B. Déformations formelles des algèbres associatives

Soit $(\mathcal{A}_0, \mu_0)$ une algèbre associative unitaire sur un anneau commutatif unitaire R.

Définition V.1 *Une déformation associative formelle de l'algèbre associative unitaire $(\mathcal{A}_0, \mu_0)$ est la donnée d'une suite $\mu_1, \mu_2, \dots$ d'applications R-bilinéaires $\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ telles que*

1.
$$\sum_{s=0}^{r} \big(\mu_s\big(\mu_{r-s}(a,b),c\big) - \mu_s\big(a,\mu_{r-s}(b,c)\big)\big) = 0 \tag{5.1}$$

quels que soient $r \in Nature(London)$ et $a,b,c \in \mathcal{A}_0$.

2. *$\mu_r(1,a) = 0 = \mu_r(a,1)$ quels que soient $r \in Nature(London)$, $r \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}_0$.*

La proposition suivante est évidente:

Proposition V.1 *L'espace $\mathcal{A} := \mathcal{A}_0[[\lambda]]$ muni de la multiplication $\mu := \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \mu_r$, c.-à-d.*

$$\mu(a,b) := \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \sum_{s+t+u=0} \mu_s(a_t, b_u)$$

quels que soient $a = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t a_t$ et $b = \sum_{u=0}^{\infty} \lambda^u b_u$ dans $\mathcal{A}$, est une algèbre associative sur l'anneau $R[[\lambda]]$.

Pour le cas $r = 1$ de l'équation (5.1) on obtient (en écrivant $\mu_0(a,b) =: ab$):

$$0 = a\mu_1(b,c) - \mu_1(ab,c) + \mu_1(a,bc) - \mu_1(a,b)c =: (\delta_H \mu_1)\big(a,b,c\big)$$

où δ_H est l'opérateur cobord de Hochschild défini sur

$$C(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} C^k(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} Hom_R(\mathcal{A}_0 \otimes_R \cdots \otimes_R \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0)$$

par

$$\begin{aligned}
&(\delta_H f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k+1}) := a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{k+1}) \\
&+ \sum_{r=1}^{k} (-1)^r f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{r-1} \otimes a_r a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_{k+1}) \\
&+ (-1)^{k+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) a_{k+1}
\end{aligned}$$

Il est bien connu que $\delta_H^2 = 0$, alors cet opérateur définit une cohomologie, à savoir la *cohomologie de Hochschild*:

$$\begin{aligned}
Z^k(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0) &:= Ker\big(\delta_H : C^k(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0) \to C^{k+1}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0)\big) \\
B^k(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0) &:= Im\big(\delta_H : C^{k-1}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0) \to C^k(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0)\big) \\
HH^k(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0) &:= Z^k(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0)/B^k(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0)
\end{aligned}$$

Les éléments de $Z^k(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0)$ s'appellent les *k-cocycles de Hochschild* de $\mathcal{A}_0$, les éléments de $B^k(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0)$ s'appellent les *k-cobords de Hochschild* de $\mathcal{A}_0$ (où $B^0(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0) := 0$), et $HH^k(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0)$ s'appelle le k^{eme} *groupe de cohomologie de Hochschild de $\mathcal{A}_0$*.

Par conséquent, pour toute déformation formelle μ_1 est toujours un 2-cocycle de Hochschild. Dans le cas plus général où μ n'est pas nécessairement associative on déduit aisément pour *l'associateur* de μ

$$A(a,b,c) := \mu\big(\mu(a,b),c\big) - \mu\big(a,\mu(b,c)\big)$$

l'identité suivante:

$$\begin{aligned}0 &= \mu\big(a, A(b,c,d)\big) - A\big(\mu(a,b),c,d\big) + A\big(a,\mu(b,c),d\big)\\ &\quad - A\big(a,b,\mu(c,d)\big) + \mu\big(A(a,b,c),d\big)\end{aligned}$$

quels que soient $a,b,c,d \in \mathcal{A}_0$. Pour une déformation formelle on veut que $A = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r A_r = 0$. Supposons que les composantes $A_0, A_1, \ldots, A_k$ soient toutes zéro. Grâce à l'identité précédente on obtient à l'ordre $r+1$ de λ:

$$\delta_H A_{r+1} = 0.$$

Puisque

$$A_{r+1} = \delta_H \mu_{r+1} + A'_{r+1}$$

où le reste A'_{r+1} ne contient que les termes $\mu_0, \cdots, \mu_r$ il s'ensuit que

$$\begin{array}{rcl}\text{On a :}\quad \delta_H A'_{r+1} = 0 & \Longrightarrow & A'_{r+1} \in Z^3(\mathcal{A}_0,\mathcal{A}_0)\\ \text{On veut :} A'_{r+1} \overset{!}{=} -\delta_H \mu_{r+1} & \Longrightarrow & A'_{r+1} \overset{!}{\in} B^3(\mathcal{A}_0,\mathcal{A}_0)\end{array}$$

Par conséquent, les obstructions pour continuer la construction des termes μ_r d'une déformation associative formelle de μ_0 se trouvent à chaque étape dans $HH^3(\mathcal{A}_0,\mathcal{A}_0)$.

Pour le cas particulier très important $\mathcal{A}_0 = C^\infty(M,\mathbb{C})$ on considère les cochaînes de Hochschild qui constituent des opérateurs multi-différentiels. Ce sous-espace du complex $C\big(C^\infty(M,\mathbb{C}), C^\infty(M,\mathbb{C})\big)$ qui est abbrévié par $C_{\mathrm{diff}}\big(C^\infty(M,\mathbb{C}), C^\infty(M,\mathbb{C})\big)$ est un sous-complex par rapport à l'opérateur cobord de Hochschild. Sa cohomologie s'appelle la *cohomologie de Hochschild différentielle de* $C^\infty(M,\mathbb{C})$ est dénotée par $HH_{\mathrm{diff}}\big(C^\infty(M,\mathbb{C}), C^\infty(M,\mathbb{C})\big)$. Le calcul de cette cohomologie est due à Hochschild-Kostant-Rosenberg[56], Cahen-DeWilde-Gutt[22] et DeWilde-Lecomte[31] dont le résultat est

Théorème V.1

$$HH_{\mathrm{diff}}\big(C^\infty(M,\mathbb{C}), C^\infty(M,\mathbb{C})\big) \cong \Gamma(\Lambda TM).$$

Une généralisation de ce résultat fut obtenue par A.Connes en 1985 (voir[27], p.207-210) qui avait remplacé les cochaînes différentielles par les cochaînes continues par rapport à la topologie de Fréchet de cette algèbre. Pflaum[72] et Nadaud[64] on montré qu'on peut laisser tomber l'hypothèse de Connes que la caractéristique d'Euler s'annule. Dans tous ces cas, la cohomologie de Hochschild obtenue est isomorphe au membre droit du théorème V.1, à savoir à l'espace des champs de multivecteurs $\Gamma(\Lambda TM)$.

C. La formule de Gerstenhaber

Les formules pour les multiplications associatives $*_s$, $*_w$ et $*_{wick}$ se généralisent de façon algébrique: le théorème suivant est dû à M.Gerstenhaber[47], p.13, Thm.8:

Théorème V.2 *Soit (A,μ_0) une algèbre associative unifère sur un anneau commutatif k qui contient $\mathbb{Q}$ où $\mu_0 : A\otimes A \to A$ désigne la multiplication de A. Soient $D_1,\ldots,D_n, E_1,\ldots,E_n$ $2n$ dérivations de (A,μ_0) qui commutent deux-à-deux, c.-à-d. $D_k\mu_0 = \mu_0(D_k\otimes 1 + 1\otimes D_k)$, $E_l\mu_0 = \mu_0(E_l\otimes 1 + 1\otimes E_l)$, $D_kD_l = D_lD_k$, $D_kE_l = E_lD_k$ et $E_kE_l = E_lE_k$ quels que soient $1\le k,l\le n$. Soit $r := \sum_{k=1}^n D_k\otimes E_k$. Alors sur l'espace $A[[\lambda]]$ il y a une multiplication associative $k[[\lambda]]$-bilinéaire μ définie par*

$$\mu := \mu_0 \circ e^{\lambda r}. \tag{5.2}$$

Démonstration: Le raisonnement élégant suivant a été trouvé par A.Dimakis et F.Müller-Heussen dans[34] pour un cas particulier: on définit les trois applications linéaires: $A\otimes A\otimes A \to A\otimes A\otimes A$ suivantes (où $\mathbf{1}$ désigne l'application identique $A\to A$) $r_{12} := r\otimes \mathbf{1}$, $r_{23} := \mathbf{1}\otimes \mathbf{r}$ et $r_{13} := \sum_{k=1}^n D_k\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{E_k}$. Puisque les dérivations commutent on a $[r_{12}, r_{13}] = 0$, $[r_{12}, r_{23}] = 0$ et $[r_{13}, r_{23}] = 0$. Grâce à l'identité de dérivation il s'ensuit

$$\begin{aligned}r\ \mu_0\otimes\mathbf{1} &= \mu_0\otimes\mathbf{1}\ (\mathbf{r_{13}}+\mathbf{r_{23}})\quad\text{et}\\ r\ \mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\mu_0} &= \mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\mu_0}\ (\mathbf{r_{12}}+\mathbf{r_{13}}),\end{aligned}$$

alors

$$e^{\lambda r}\ \mu_0 \otimes \mathbf{1} = \mu_0 \otimes \mathbf{1}\ \mathbf{e}^{(\mathbf{r_{13}}+\mathbf{r_{23}})} \quad \text{et}$$
$$e^{\lambda r}\ \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu_0} = \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu_0}\ \mathbf{e}^{(\mathbf{r_{12}}+\mathbf{r_{13}})},$$

donc, puisque les r_{ij} commutent entre eux:

$$\mu\ \mu \otimes \mathbf{1} = \boldsymbol{\mu_0}\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{\lambda}\mathbf{r}}\ \boldsymbol{\mu_0} \otimes \mathbf{1}\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{\lambda}\mathbf{r_{12}}} = \boldsymbol{\mu_0}\ \boldsymbol{\mu_0} \otimes \mathbf{1}\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r_{12}}+\mathbf{r_{13}}+\mathbf{r_{23}})}.$$

De façon analogue:

$$\mu\ \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu_0}\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{\lambda}\mathbf{r}}\ \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu_0}\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{\lambda}\mathbf{r_{23}}} = \boldsymbol{\mu_0}\ \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu_0}\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r_{12}}+\mathbf{r_{13}}+\mathbf{r_{23}})}.$$

Puisque μ_0 est associative on a $\mu_0\ \mu_0 \otimes \mathbf{1} = \boldsymbol{\mu_0}\ \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu_0}$, d'où l'associativité de la multiplication μ. □

D. Ordre standard, Weyl-Moyal et Wick dans $\mathbb{R}^{2n}$

On voit facilement que les multiplications $*_s$ et $*_w$ sont des cas particuliers de la formule de Gerstenhaber si l'on remplace le nombre réel $\hbar$ par le paramètre formel λ et si l'on met

$$r_s := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial p} \otimes \frac{\partial}{\partial q}$$

pour retrouver $*_s$,

$$r_w := \frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q} \otimes \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \otimes \frac{\partial}{\partial q}\right)$$

pour $*_w$ et

$$r_{wick} := 2\frac{\partial}{\partial z} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

pour $*_{wick}$. Ainsi on obtient des multiplications associatives sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})[[\lambda]]$: dans ce cadre de séries formelles les multiplications $*_s$ et $*_w$ restent bien-définies bien que l'on ne puisse plus mettre $\lambda = \hbar$ parce que les séries formelles ne convergent plus en général.

Les généralisations de ces formules $*_s$, $*_w$ et $*_{wick}$ pour le cas $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ sont assez claires:

$$r_s := \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_k} \otimes \frac{\partial}{\partial q_k} \tag{5.3}$$

$$r_w := \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_k} \otimes \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \otimes \frac{\partial}{\partial q_k}\right) \tag{5.4}$$

$$r_{wick} := 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \tag{5.5}$$

et l'on obtient

$$f *_s g = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda/i)^r}{r!} \sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{n} \frac{\partial^r f}{\partial p_{k_1}\cdots\partial p_{k_r}}\ \frac{\partial^r g}{\partial q_{k_1}\cdots\partial q_{k_r}} \tag{5.6}$$

pour le produit standard, et (tout en écrivant $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k} \wedge \frac{\partial}{\partial p_k} = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2n} P^{kl}\frac{\partial}{\partial x_k} \wedge \frac{\partial}{\partial x_l}$ avec $(q,p) = x$) pour le produit de Weyl-Moyal:

$$f *_w g = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i\lambda/2)^r}{r!} \sum_{k_1,\ldots,k_r,l_1,\ldots,l_r=1}^{2n} P^{k_1 l_1}\cdots P^{k_r l_r}\frac{\partial^r f}{\partial x_{k_1}\cdots\partial x_{k_r}}\ \frac{\partial^r g}{\partial x_{l_1}\cdots\partial x_{l_r}}. \tag{5.7}$$

et

$$f *_{wick} g = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^r}{r!} \sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{n} \frac{\partial^r f}{\partial z_{k_1}\cdots\partial z_{k_r}}\frac{\partial^r g}{\partial \bar{z}_{k_1}\cdots\partial \bar{z}_{k_r}}. \tag{5.8}$$

E. Symboles standards des opérateurs multidifférentiels

Les formules pour $*_w$ et $*_s$ de la section précédente convergent dans la variable λ au cas où les fonctions f et g sont des polynômes en $p_1, \ldots, p_n$ à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et On appelle cet espace ${\mathcal{C}^\infty}_{pp}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^{\not\models\ltimes *}$ soit e_α la *fonction exponentielle*

$$e_\alpha(x) := e^{\alpha(x)}$$

Soit D un opérateur différentiel dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, c.-à-d. il y a un entier N et des fonctions $D^{a;i_1\ldots i_a} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telles que

$$D = \sum_{a=0}^{N} \sum_{i_1,\ldots,i_a=1}^{n} D^{a;i_1\ldots i_a} \frac{\partial^a}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_a}} \tag{5.9}$$

On définit son *symbole standard*

$$\check{D}(q,\alpha) := (De_\alpha)(q)e_{-\alpha}(q) = \sum_{a=0}^{N} \sum_{i_1,\ldots,i_a=1}^{n} D^{a;i_1\ldots i_a} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}. \tag{5.10}$$

On voit aisément que

$$\check{\rho}_s(f)(q, \frac{ip}{\hbar}) = f(q,p) \tag{5.11}$$

Il est évident que le symbole standard définit une bijection linéaire entre l'espace $\mathrm{Diffop}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ des tous les opérateurs différentiels dans $\mathbb{R}^n$ et l'espace ${\mathcal{C}^\infty}_{pp}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$.

Soit k un entier positif et D un opérateur k-différentiel, c-à-d. il existe un entier N et fonctions $D^{(a_1,\ldots,a_k),I_1,\ldots,I_k}$ où $I_1 := (i_{11}, \ldots, i_{1a_1})$, $I_2 := (i_{21}, \ldots, i_{2a_2})$,..,$I_k := (i_{k1}, \ldots, i_{ka_k})$ sont des multi-indices (les i_{bc} varient entre 1 et n) telles que

$$D(f_1, \ldots, f_k) = \sum_{a_1,\ldots,a_k=1}^{N} \sum_{I_1,\ldots,I_k} D^{(a_1,\ldots,a_k),I_1,\ldots,I_k} \frac{\partial^{a_1} f_1}{\partial x^{I_1}} \cdots \frac{\partial^{a_k} f_k}{\partial x^{I_k}} \tag{5.12}$$

où par exemple $\partial^{a_1}/\partial x^{I_1}$ est une abbréviation pour $\partial^{a_1}/(\partial x^{i_{11}} \cdots \partial x^{i_{1a_1}})$. On définit le *symbole standard d'un opérateur k-différentiel D* pour $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)} \in \mathbb{R}^{n*}$ par

$$\check{D}(q, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)}) := \big(D(e_{\alpha^{(1)}}, \ldots, e_{\alpha^{(k)}})\big)(q)e^{-(\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(k)})(q)}. \tag{5.13}$$

Comme dans le cas des opérateurs différentiels ceci revient à dire que l'on remplace les dérivées partielles dans (5.12) par les nk variables additionnelles $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)}$ desquelles $\check{D}$ dépend de façon polynomiale. Le lemme suivant est évident:

Lemme V.2 *Tout opérateur multidifférentiel D dans $\mathbb{R}^n$ est uniquement déterminé par son symbole standard $\check{D}$ quelque soit l'entier strictement positif k ou, de façon équivalente, par ses valeurs sur toutes les fonctions exponentielles.*

VI. STAR-PRODUITS

Dans le chapitre précédent on a vu que l'on peut construire des multiplications noncommutatives ou "quantiques" $*$ sur $\mathbb{C}[q,p]$ et même sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})[[\lambda]]$ en s'appuyant sur le calcul symbolique, c.-à-d. en utilisant une bijection linéaire entre $\mathbb{C}[q,p]$ et une algèbre associative déjà donnée, à savoir l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. L'idée principale des star-produits est de construire une telle multiplication associative $*$ directement sur $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})[[\lambda]]$ (où M est une variété de Poisson) sans utiliser une 'représentation' dans une algèbre d'opérateurs différentiels: pour la plupart des variétés de Poisson il n'est pas du évident ce que l'on pourrait choisir comme 'algèbre d'opérateurs différentiels'. Du point de vue de la physique, ceci veut dire que l'on renonce tout d'abord à l'espace de Hilbert pour la description du système quantique, et on commence par établir la théorie en considérant l'algèbre des observables.

A. Définition

La définition suivante fut donnée par F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer en 1978[7]:

Définition VI.1 *Soit* (M, P) *une variété de Poisson. La structure d'un* star-produit *sur* M *ou d'une* quantification par déformation *sur* M *est la donnée d'une suite d'applications* $\mathbb{C}$*-bilinéaires*

$$C_r : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$$

quels que soient $r \in Nature(London)$ *qui satisfassent les conditions suivantes* $(f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}))$*:*

1. *Tout* C_r *est un* opérateur bidifférentiel*, c.-à-d. il existe un entier positif* N_r *tel que dans chaque carte* $\big(U, (x^1, \ldots, x^n)\big)$ *il existe des fonctions* $C_r^{(a,b),i_1\cdots i_a,j_1\cdots j_b} : U \to \mathbb{C}$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *telles que dans* U*:*

$$C_r(f, g) = \sum_{a,b=0}^{N_r} \sum_{i_1,\ldots,i_a,j_1,\ldots,j_b=1}^{n} C_r^{(a,b),i_1\cdots i_a,j_1\cdots j_b} \frac{\partial^a f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_a}} \frac{\partial^b g}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_b}}.$$

2. $C_0(f, g) = fg$ *(limite classique).*
3. $C_1(f, g) - C_1(g, f) = i\{f, g\} := iP(df, dg)$ *(limite classique).*
4. $C_r(1, g) = 0 = C_r(f, 1)$ *quel que soit* $r \geq 1$ *(la fonction* 1 *reste élément neutre).*
5. $\sum_{s=0}^{r} \big(C_s(C_{r-s}(f, g), h\big) = \sum_{s=0}^{r} \big(C_s(f, C_{r-s}(g, h)\big)$ *quel que soit* $r \in Nature(London)$ *(associativité).*

La série formelle

$$* := \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_r$$

s'appelle un star-produit *sur* M*.*
En outre, si pour tout $r \in Nature(London)$ *et* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$

$$\overline{C_r(f, g)} = C_r(\bar{g}, \bar{f})$$

(où $^-$ *dénote conjugaison complexe point-par-point) le star-produit s'appelle* symétrique *ou* hermitien*. Un star-produit symétrique s'appelle* de type Weyl-Moyal *ssi*

$$C_r(g, f) = (-1)^r C_r(f, g).$$

Si l'ordre N_r *de l'opérateur bidifférentiel* C_r *est égal à* r *le star-produit s'appelle* de type Vey*. Finalement, si* (M, P) *est une variété* semi-Kählerienne *(c.-à-d.* (M, ω) *est symplectique et admet une structure complexe* J *telle que* $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ *pour tous champs de vecteurs* X, Y*) le star-produit s'appelle* de type Wick *ou* à séparation des variables *ssi dans chaque carte complexe* $\big(U, (z^1, \ldots, z^n)\big)$ *il existe des fonctions* $C_r^{(a,b),i_1\cdots i_a,j_1\cdots j_b} : U \to \mathbb{C}$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *telles que dans* U*:*

$$C_r(f, g) = \sum_{a,b=0}^{N_r} \sum_{i_1,\ldots,i_a,j_1,\ldots,j_b=1}^{n} C_r^{(a,b),i_1\cdots i_a,j_1\cdots j_b} \frac{\partial^a f}{\partial z^{i_1}\cdots\partial z^{i_a}} \frac{\partial^b g}{\partial \bar{z}^{j_1}\cdots\partial \bar{z}^{j_b}}.$$

Par exemple, $*_s$, $*_w$ et $*_{wick}$ sont de type Vey, $*_w$ est symétrique et de type Weyl-Moyal et $*_{wick}$ est de type Wick.
Le corollaire suivant est assez évident:

Corollaire VI.1 *Soit $*$ un star-produit sur la variété de Poisson (M,P). Alors l'espace $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})[[\lambda]]$ devient une algèbre associative sur l'anneau $\mathbb{C}[[\lambda]]$ moyennant ($F = \sum_{r=0}^\infty \lambda^r F_r, G = \sum_{r=0}^\infty \lambda^r G_r \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})[[\lambda]]$)*

$$F * G := \sum_{r=0}^\infty \lambda^r \sum_{s+t+u=0} C_s(F_t, G_u).$$

Si le star-produit est en plus symétrique, alors la conjugaison complexe point-par-point $^-$ devient un antiautomorphisme de l'algèbre $(\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})[[\lambda]], *)$, c.-à-d.:

$$\overline{F * G} = \overline{G} * \overline{F}.$$

Pour deux star-produits $*$ et $*'$ il y a la notion suivante d'isomorphie formelle que l'on a déjà vu pour $*_s$ et $*_w$:

Définition VI.2 *Soit (M,P) une variété de Poisson et $*, *'$ deux star-produits. On dit que $*$ est* équivalent à $*'$ *si et seulement s'il existe une série formelle, appelée une* transformation d'équivalence

$$S = id + \sum_{r=1}^\infty \lambda^r S_r$$

(où S_r sont des opérateurs différentiels sur M) telle que

$$F *' G = S^{-1}\big((SF) * (SG)\big)$$

quels que soient $F, G \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})[[\lambda]]$.

Puisque l'opérateur N (voir eq. (4.17) prend la forme $1 + \frac{\lambda}{2i}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} + o(\lambda^2)$, il définit une transformation d'équivalence entre les star-produits $*_w$ et $*_s$.

B. Existence

1. *Variétés symplectiques*

Après quelques résultats importants pour des cas particuliers (des variétés symplectiques dont le troisième groupe de de Rham s'annule,[65] et des fibrés cotangent des variétés parallélisables[23]) le premier résultat d'existence complèt fut démontré par M.DeWilde et P.Lecomte en 1983,[32]:

Théorème VI.1 (DeWilde,Lecomte 1983) *Sur une variété symplectique (M,ω) quelconque il existe un star-produit.*

La démonstration s'appuyait sur les calculs de la cohomologie de Hochschild de l'algèbre associative commutative $\big(\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C}),\cdot\big)$ et le deuxième et troisième groupes de cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ munie du crochet de Poisson $\{\ ,\ \}$, voir[33] d'une part et sur une homogénéité locale par une généralisation du champ d'Euler d'un fibré cotangent d'autre part.

Indépendamment de ce résultat, B.Fedosov donna une démonstration du Théorème VI.1 en 1985,[40]. Sa démonstration est remarquable parce qu'elle utilise plutôt des connections symplectiques que des cartes locales: alors sa méthode permet de construire des star-produits avec des propriétés particulières, par exemple avec quelques symétries.

2. *Variétés de Poisson*

Dans le domaine des star-produits, la sensation spectaculaire de l'an 1997 fut l'annonce du résultat suivant par Maxim Kontsevitch:

Théorème VI.2 (Kontsevitch 1997) *Il existe un star-produit sur une variété de Poisson* (M, P) *quelconque.*

Pour les idées et le cadre de cette construction voir le travail original[63] et l'article[3] pour plus de détails de la démonstration. Cattaneo et Felder ont retracé les origines du théorème de Kontsevitch dans la théorie des modèles de Poisson-sigma, voir[25], et ont donné une globalisation à la Fedosov dans[26].

Pour la variété de Poisson $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^n P^{ab}\partial_a \wedge \partial_b)$ Kontsevitch utilise l'Ansatz suivant pour l'opérateur bidifférentiel C_r du star-produit: soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, soit $2r = n_1 + \cdots + n_r + M + N$ une partition de l'entier positif $2r$ en somme d'entiers positifs, et soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, 2r\}$. On dénote le couple $\big((n_1, \ldots, n_r, M, N), \sigma\big) =: \Gamma_r$ et l'on définit l'opérateur bidifférentiel

$$\begin{aligned} C_{\Gamma_r}(f, g) := \sum_{a_1,\ldots,a_{2r}=1}^{n} \Bigg(& \frac{\partial^{n_1} P^{a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}}}{\partial x_{a_1} \cdots \partial x_{a_{n_1}}} \cdots \frac{\partial^{n_r} P^{a_{\sigma(2r-1)}a_{\sigma(2r)}}}{\partial x_{a_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1}} \cdots \partial x_{a_{n_1+\cdots+n_r}}} \\ & \frac{\partial^M f}{\partial x_{a_{n_1+\cdots+n_r+1}} \cdots \partial x_{a_{n_1+\cdots+n_r+M}}} \; \frac{\partial^N g}{\partial x_{a_{n_1+\cdots+n_r+M+1}} \cdots \partial x_{a_{2r}}} \Bigg). \end{aligned} \tag{6.1}$$

L'opérateur C_r s'obtient par une combinaison linéaire particulière sur les opérateurs précédents paramétrée par tous les couples Γ_r possibles. Kontsevitch représente les Γ_r par des graphes à $r + 2$ sommets (correspondant à r structures de Poisson et à deux fonctions) et $2r$ arrêtes (correspondant à $2r$ dérivées partielles) dans le demi-plan supérieur, et les coefficients w_{Γ_r} de la combinaison linéaire s'obtiennent par une intégration liée à l'image géométrique du graphe:

$$C_r(f, g) = \sum_{\Gamma_r} w_{\Gamma_r} C_{\Gamma_r}(f, g). \tag{6.2}$$

3. Variétés semikähleriennes

En tant que variétés symplectiques les variétés semikähleriennes sont munies des star-produits. La question de savoir si ces star-produits sont de type Wick devait être démontrée séparément:

Théorème VI.3 *Sur une variété semikählerienne* (M, ω, I) *quelconque il existe un star-produit de type Wick.*

Ce théorème est dû à A.Karabegov[57] et –plus tard, mais indépendamment– par S.Waldmann et l'auteur[18]. Karabegov a recollé des opérateurs différentiels locaux sur les fonctions holomorphes locales tandis que Bordemann/Waldmann ont utilisé une modification évidente de la méthode de Fedosov.

4. Supervariétés symplectiques paires

Soit $\tau : E \to M$ un fibré vectoriel sur une variété symplectique (M, ω) muni d'une métrique fibre q et une connection ∇^E dans E compatible à q. L'espace des sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ du fibré ΛE^*, $\mathcal{C}_\prime := -(*\mathcal{E}^*)$ est une algèbre associative commutative graduée par rapport à la multiplication extérieure $\wedge$ point par point. $\mathcal{C}_\prime$ est appelée algèbre des superfonctions. Cette structure s'appelle *supervariété scindée*, voir[5],[38,39],[49] pour plus de détails. Il y a un crochet de Poisson gradué $\{\ ,\ \}_R : \mathcal{C}_\prime \times \mathcal{C}_\prime \to \mathcal{C}_\prime$ sur cette algèbre qui est dû à Rothstein[73] et se definit de façon suivante: soit U le domaine d'une carte de M qui trivialise le fibré E où: $(x^1, \ldots, x^m)$ désigne la carte de M, $\partial_1, \ldots, \partial_m$ désigne une base locale des champs de vecteurs de M correspondant à cette carte, P^{kl} $(1 \leq k, l \leq m)$ les composantes de la structure de Poisson de M, $e_1, \ldots, e_n$ est une base des sections locales de E, $e^1, \ldots, e^n$ est la base duale, q_{AB} $(1 \leq A, B \leq m)$ sont les composantes de la métrique q par rapport aux bases précédentes, q^{AB} (la matrice inverse de q_{AB}) les composantes de la métrique q^{-1} induite par q et $R^{(E)}{}^{A}_{Bkl}$ les composantes du tenseur de courbure de la connection ∇^E. On forme d'abord le champ de tenseur $\hat{R}^{(E)} \in \Gamma\big(Hom(TM) \otimes \Lambda^2 E^*\big)$ par

$$\big(\hat{R}^{(E)}\big)^k{}_{lAB} := -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{C=1}^{n} q_{AC} P^{kr} R^{(E)}{}^{C}_{Brl}. \tag{6.3}$$

L'espace des sections $\Gamma\big(Hom(TM)\otimes\Lambda E^*\big)$ est une algèbre associative de façon naturelle, et l'élément $\hat{R}^{(E)}$ est visiblement nilpotent. Alors la série géométrique

$$(1-2\hat{R}^{(E)})^{-1} := \sum_{a=0}^{m}\big(2\hat{R}^{(E)}\big)^a \tag{6.4}$$

est bien définie. Soient $\phi\in\Gamma(\Lambda^s E^*)$ et $\psi\in\Gamma(\Lambda E^*)$. Alors le supercrochet de Rothstein est défini de manière suivante:

$$\begin{aligned}\{\phi,\psi\} := &\sum_{i,j,k=1}^{m} P^{ij}\big((1-2\hat{R}^{(E)})^{-1}\big)_i^k\wedge\nabla^E_{\partial_k}\phi\wedge\nabla^E_{\partial_j}\psi\\ &+\sum_{A,B=1}^{n} q^{AB}(-1)^{s-1}(i_{e_a}\phi)\wedge(i_{e_B}\psi)\end{aligned}\tag{6.5}$$

En utilisant quelques éléments de la construction de Fedosov, j'ai montré dans[21] (voir aussi[10]) le résultat suivant:

Théorème VI.4 *L'algèbre $\mathcal{C}_{\prime}$ admet une déformation associative formelle telle que le terme d'ordre 1 est égal à $\frac{i\lambda}{2}$ fois le supercrochet de Rothstein.*

R.Eckel a formulé la construction de Fedosov dans le cadre des supervariétés dans sa thèse de doctorat[39].

C. Equivalence

1. Variétés symplectiques

Près de dix ans après la démonstration d'existence, la classification des classes d'équivalences fut achevée par Deligne[29], Nest-Tsygan[66,67] et Bertelson-Cahen-Gutt[9]:

Théorème VI.5 *Soit (M,ω) une variété symplectique. Alors les classes d'équivalence des star-produits sur (M,ω) sont en bijection avec les séries formelles à coefficients dans $H^2_{\mathrm{dR}}(M)$, le deuxième groupe de cohomologie de de Rham de la variété M.*

On peut fixer la bijection de façon géométrique (par exemple voir[53]), et on identifie la classe d'équivalence $[*]$ d'un star-produit $*$ avec sa série formelle à coefficients dans le deuxième groupe de cohomologie de de Rham. Cette série est appelée la *classe de Deligne de* $*$. Dans la construction de Fedosov on peut également introduire une série formelle de classes de 2-formes fermées: Neumaier a montré qu'elles coïncident avec les classes de Deligne, voir[68].

2. Variétés de Poisson

Dans le cas d'une variété de Poisson le résultat de classification s'avérait plus difficile et fut achevé par Kontsevitch[63]: Une *structure de Poisson formelle* P sur une variété différentiable M est une série formelle $P=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r P_r$ où les coefficients P_r sont des champs de bivecteurs dans $\Gamma(\Lambda^2 TM)$ tels que

$$[P,P]=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \sum_{a=0}^{r}[P_a,P_{r-a}]=0 \ \text{ quel que soit r} \in \text{Nature(London)}$$

où $[\ ,\ ]$ désigne le crochet de Schouten. Un *champ de vecteurs formels* X est une série formelle $X=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r X_r$ où les coefficients X_r sont des champs de vecteurs sur M. On définit la dérivée de Lie de P par rapport à X de façon naturelle

$$L_X(P) := [X,P] = \sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r\sum_{a=0}^{r}[X_a,P_{r-a}]$$

et l'on dit finalement que deux structures de Poisson formelles P et P' sont *formellement difféomeophes* ss'il existe un champ de vecteurs formel X tel que

$$P' = e^{\lambda L_X}(P).$$

Avec ces structures-là les star-produits se classifient de la manière suivante:

Théorème VI.6 (Kontsevitch 1997) *Soit* (M, P_0) *une variété de Poisson. Alors les classes d'équivalence des star-produits sur* (M, P_0) *sont en bijection avec les classes de difféomorphismes formels des structures de Poisson formelles dont le terme d'ordre* 0 *vaut* P_0.

VII. EXEMPLES EXPLICITES

A. Fibré cotangent de S^n

Cet exemple est dû à F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer[7]:

On considère la variété symplectique $M' := T^*(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}) = (\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R}^{\ltimes+\not\Vdash}$ avec des coordonnées canoniques (q,p) munie de la forme symplectique $\sum_{k=1}^{n+1} dq_k \wedge dp_k$. Les deux fonctions

$$H_1(q,p) := \sum_{k=1}^{n+1} q_k p_k =: q \cdot p \tag{7.1}$$

$$H_2(q,p) := \sum_{k=1}^{n+1} (q_k)^2 =: |q|^2 \tag{7.2}$$

engendrent une algèbre de Lie de dimension 2 par rapport au crochet de Poisson, et l'on a

$$\{H_1, H_2\} = -2H_2. \tag{7.3}$$

En outre, les flots de H_1 et de H_2 prennent la forme

$$\Phi^1_s(q,p) = (e^s q, e^{-s} p) \tag{7.4}$$

$$\Phi^2_t(q,p) = (q, p - 2tq) \tag{7.5}$$

et ils engendrent une action du groupe de Lie

$$G := \{(\alpha, t) \in \mathbb{R}^2 | \alpha > 0\} \tag{7.6}$$

sur M' donnée par

$$(\alpha, t).(q,p) := (\alpha q, -2tq + \alpha^{-1} p). \tag{7.7}$$

Soit T^*S^n définie par

$$M := T^*S^n := \{(q,p) \in M' | q \cdot p = 0 \text{ et } |\mathrm{q}|^2 = 1\}. \tag{7.8}$$

On voit rapidement que cette définition correspond bien au fibré tangent de la sphère, ce qui est isomorphe au fibré cotangent moyennant la métrique riemannienne canonique sur S^n. Il existe une projection

$$\pi : M' \to M : (q,p) \mapsto \left(\frac{q}{|q|}, |q|p - \frac{q \cdot p}{|q|} q\right) \tag{7.9}$$

qui est une submersion surjective. Les fibres de la projection sont les orbites du groupe G. Par conséquent

Lemme VII.1 *Soit* $F \in \mathcal{C}^\infty(M', \mathbb{C})$. *Alors il existe une fonction* $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ *telle que* $F = f \circ \pi$ *si et seulement si* F *est* G*-invariante, c.-à-d.* $F\big((\alpha,t).(q,p)\big) = F\big(q,p\big)$.

Puisque G est connexe, une telle fonction F est G-invariante ssi

$$\{F, H_1\} = 0 = \{F, H_2\}. \tag{7.10}$$

En utilisant le star-produit $*_w$ (5.7) sur M' on voit que pour tout polynôme quadratique F et toute fonction $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M', \mathbb{C})$ on a la formule importante

$$F *_w \tilde{F} - \tilde{F} *_w F = i\lambda\{F, \tilde{F}\} \tag{7.11}$$

où les termes d'ordre supérieur s'annulent. Si l'on applique cette formule à $F = H_1$ ou $F = H_2$ on voit directement –utilisant (7.10)– qu'une fonction G est G-invariante si et seulement si elle commute avec H_1 et H_2 par rapport à $*_w$. Il s'ensuit que l'espace des fonctions G-invariantes est une sous-algèbre associative de $(\mathcal{C}^\infty(M', \mathbb{C})[[\lambda]], *_w)$. Par conséquent:

Théorème VII.1 *Il existe un star-produit $*_{BFFLS}$ sur M pour lequel on a la formule explicite suivante:*

$$f *_{BFFLS} g\big(\pi(q,p)\big) = (\pi^* f) *_w (\pi^* g)(q,p).$$

B. L'espace projectif complexe

La formule explicite décrite ci-dessous pour un star-produit sur l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ a été trouvée dans[20] où l'on peut trouver les détails de la déduction.

Soit

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n \tag{7.12}$$

la projection canonique dont les fibres sont les droites complexes dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ passant par l'origine. Comme dans l'exemple précédent, les fibres s'obtiennent par l'action d'un groupe de Lie de dimension réelle 2, à savoir du groupe multiplicatif $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Malheureusement, ce groupe ne préserve plus un star-produit sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ce qui rend la déduction un peu plus difficile. Avec les coordonnées complexes $z := (z_1, \ldots, z_{n+1})$ sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ on définit

$$x := \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|^2. \tag{7.13}$$

Théorème VII.2 *Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C})$. Alors la formule suivante donne un star-produit $*$ de type Wick sur la variété de Kähler $\mathbb{C}P^n$:*

$$\begin{aligned} \pi^*(f * g)(z) \quad &:= \quad \pi^*(fg)(z) \\ + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2\lambda)^r}{r!} \frac{x^r}{(1+\lambda)\cdots(1+r\lambda)} &\sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{n+1} \frac{\partial^r \pi^* f}{\partial z_{k_1} \cdots \partial z_{k_r}}(z) \frac{\partial^r \pi^* g}{\partial \bar{z}_{k_1} \cdots \partial \bar{z}_{k_r}}(z). \end{aligned}$$

Dans[19] on a montré que ce star-produit converge bien sur les fonctions représentatives de l'action canonique du groupe de Lie $U(n+1)$ pour certaines valeurs réelles de λ.

C. L'espace dual d'une algèbre de Lie

Cet exemple très important a été trouvé indépendemment par V.Drinfel'd et S.Gutt,[36],[52]:

Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]$ une algèbre de Lie réelle et $\mathfrak{g}^*$ son espace dual qui est une variété de Poisson (voir (2.23)). Ici on utilise le paramètre formel $\nu := i\lambda$. Soit $H : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}[[\nu]]$ la loi de groupe formel de *Baker-Campbell-Hausdorff*:

$$
\begin{aligned}
&H(x,y) := x+y \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geq 0\\ l_1,\ldots,l_n\geq 0\\ k_i+l_i\geq 1}}\nu^{\sum_{i=1}^n k_i+l_i}\;\frac{\big(ad(x)\big)^{k_1}\big(ad(y)\big)^{l_1}\cdots\big(ad(x)\big)^{k_n}\big(ad(y)\big)^{l_n}}{(k_1+\cdots+k_n+1)k_1!\cdots k_n!l_1!\cdots l_n!}x
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

On voit aisément que l'on peut prolonger H à $\mathfrak{g}[[\nu]]\times\mathfrak{g}[[\nu]]$. Par sa définition, H est égal au logarithme d'un produit de deux fonctions exponentielles dans l'algèbre libre complétée, alors on a

$$
H\big(H(x,y),z\big) = H\big(x,H(y,z)\big)\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}. \tag{7.15}
$$

On définit le symbole standard de $*$: $x,y\in\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}^{**}$

$$
e_x * e_y := e_{H(x,y)} \tag{7.16}
$$

Puisqu'il est évident de (7.14) que $H(x,y)-x-y$ est un multiple de ν le symbole standard de $*$ est une série formelle en ν. En outre, pour chaque puissance de ν il n'y a qu'un nombre fini de sommands dans $H(x,y)$ (7.14) ce qui implique que le symbole standard de $*$ est polynomial dans (x,y) pour chaque puissance de ν. Alors la formule (7.16) est bien définie. Le star-produit est associatif parce que $(x,y,z\in\mathfrak{g})$

$$
\begin{aligned}
(e_x*e_y)*e_z = e_{H(x,y)}*e_z &= e_{H\big(H(x,y),z\big)}\\
&= e_{H\big(x,H(y,z)\big)} = e_x*e_{H(y,z)} = e_x*(e_y*e_z)
\end{aligned}
$$

grâce à (7.15). Alors les deux opérateurs tri-différentiels définis par leurs symboles standards $(e_x*e_y)*e_z$ et $e_x*(e_y*e_z)$ coïncident sur les fonctions exponentielles, donc il sont égaux grâce à lemme V.2. La série formelle du symbole standard de $*$ a les termes d'ordre zéro et un suivants:

$$
\check{*}(\xi,x,y) = e^{\xi(H(x,y)-x-y)} = 1+\frac{\nu}{2}\xi([x,y])+o(\nu^2)
$$

d'où on déduit la limite classique de $*$. Finalement, l'opérateur

$$
\nu\frac{\partial}{\partial\nu}+\sum_{k=1}^{n}\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_k}
$$

qui compte la somme des degrés en ν et en $\xi\in\mathfrak{g}^*$ est une dérivation de $*$ d'après (7.14), donc l'opérateur bidifférentiel C_r de $*$ (qui est de degré r en ν) a au moins r derivées partielles par rapport à ξ distribuées sur les deux fonctions f et g. Il s'ensuit que $f*g$ est une polynôme en ν si f et g sont des polynômes sur $\mathfrak{g}^*$. Alors on peut mettre $\nu=1$ sur les polynômes. Cette dernière algèbre associative complexe est isomorphe à l'algèbre enveloppante $U\mathfrak{g}$ complexifiée (voir[52]).

Théorème VII.3 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie. Alors il existe un star-produit $*$ appelé BCH (Baker-Campbell-Hausdorff) et défini par (7.14) sur la variété de Poisson $(\mathfrak{g}^*,P_{\mathfrak{g}})$ qui converge (en ν) sur le sous-espace des polynômes sur $\mathfrak{g}^*$ où la multiplication est isomorphe à l'algèbre enveloppante complexifiée de $\mathfrak{g}$.*
En particulier, pour $\xi,\eta\in\mathfrak{g}$ il suit pour les fonctions linéaires $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\eta}$ définies sur $\mathfrak{g}^*$ par $\tilde{\xi}(\alpha):=\langle\alpha,\xi\rangle$:

$$
\tilde{\xi}*\tilde{\eta}-\tilde{\eta}*\tilde{\xi} = i\lambda\widetilde{[\xi,\eta]}.
$$

D. L'espace dual d'une algèbre associative

Cet exemple est une version simplifiée de l'exemple précédent qui est due à l'auteur.

Soit A une algèbre associative réelle de dimension finie n. Dans une base $e_1,\ldots,e_n$ de A (et la base duale $e^1,\ldots,e^n$ de A^*) on peut exprimer les constantes de structure

$$
m^i_{jk} := e^i(e_je_k)\in\mathbb{R} \tag{7.17}
$$

On définit le star-produit $*$ suivant sur A^* ($f, g \in \mathcal{C}^\infty(A^*, \mathbb{C})$):

$$\begin{aligned} f * g\ (\xi) &:= \\ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\nu^r}{r!} \sum_{\substack{1 \le i_1, \ldots, i_r \le n \\ 1 \le j_1, \ldots, j_r \le n \\ 1 \le k_1, \ldots, k_r \le n}} & m^{i_1}_{j_1 k_1} \cdots m^{i_r}_{j_r k_r} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_r} \frac{\partial^r f}{\partial \xi_{j_1} \cdots \partial \xi_{j_r}}(\xi) \frac{\partial^r g}{\partial \xi_{k_1} \cdots \partial \xi_{k_r}}(\xi) \end{aligned} \tag{7.18}$$

Pour vérifier l'associativité on calcule le symbole standard de $*$: soient $x, y, z \in A \cong A^{**}$, alors

$$e_x * e_y = e_{x+y+\nu xy}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} (e_x * e_y) * e_z = e_{x+y+\nu xy} * e_z &= e_{x+y+z+\nu(xy+xz+yz)+\nu^2 xyz} \quad \text{et} \\ e_x * (e_y * e_z) = e_x * e_{y+z+\nu yz} &= e_{x+y+z+\nu(xy+xz+yz)+\nu^2 xyz}, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'associativité. On peut démontrer le

Théorème VII.4 *Soit A une algèbre associative réelle de dimension finie. Alors il existe un star-produit $*$ défini par (7.18) sur la variété de Poisson A^* (munie de la structure (2.23) pour le crochet de Lie $(x, y) \mapsto [x, y] := xy - yx$) qui converge (en ν) sur le sous-espace des polynômes sur A^* où la multiplication est isomorphe à l'algèbre enveloppante complexifiée de $(A, [\ ,\ ])$.*

VIII. REPRÉSENTATIONS DES STAR-PRODUITS I

A. Définition

Soit (M, P) une variété de Poisson et C une variété différentiable. On considère l'espace Diffop(C) de tous les opérateurs différentiels sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(C, \mathbb{C})$. Ceci est une algèbre associative munie de la multiplication usuelle d'opérateurs différentiels. Il en est de même avec Diffop(C)[[λ]]. Soit $*$ un star-produit sur M.

Définition VIII.1 *Une* représentation du star-produit $*$ dans C *est un homomorphisme d'algèbres associatives $\rho : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})[[\lambda]] \to$* Diffop(C)[[$\lambda$]] *sur* $\mathbb{C}[[\lambda]]$.

Les applications ρ_s et ρ_w de la section IV (étendues aux séries formelles) sont des exemples des représentations des star-produits. On obtient un autre exemple en choisissant $M = C$ et en définissant $\rho(f) := L_f : g \mapsto f * g$ comme la multiplication gauche. On va étudier d'autres propriétés des réprésentations en paragraphe X B.

B. Représentations GNS

Une classe de représentations particulières s'obtient par un procédé analogue à celui qu'on utilise pour les représentations de Gel'fand, Naimark et Segal (GNS) des algèbres stellaires et a été étudiée par[17,78]:

Supposons que le star-produit $*$ sur la variété de Poisson (M, P) soit symétrique, c.-à-d. $\overline{f * g} = \overline{g} * \overline{f}$ quelles que soient $f, g \in \mathcal{A} := \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})[[\lambda]]$ où $\overline{(\ )}$ désigne la conjugaison point-par-point. L'anneau $C := \mathbb{C}[[\lambda]]$ s'écrit visiblement de façon $C = R \oplus iR$ où $R := \mathbb{R}[[\lambda]]$. On observe que R est un *anneau commutatif unitaire ordonné*: ceci veut dire que R se décompose en trois parties $R = R^+ \cup \{0\} \cup (-R^+)$ où R^+ désigne l'ensemble des *éléments strictement positifs* dont la définition est la suivante:

$$\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \alpha_r \quad \begin{cases} > 0 \ \text{ si } \alpha_{\mathrm{o}(\alpha)} > 0 \\ < 0 \ \text{ si } \alpha_{\mathrm{o}(\alpha)} < 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

et on a $R^+ + R^+ \subset R^+$ et $R^+R^+ \subset R^+$. On a la conjugaison complexe $\overline{r_1 + ir_2} = r_1 - ir_2$ dans C et on écrit $|c|^2$ pour $\overline{c}c$. Soit maintenant $\mathcal{A}'$ un idéal bilatère de $\mathcal{A}$ stable par la conjugaison complexe (par exemple $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}' := \mathcal{C}^\infty{}_0(M, \mathbb{C})[[\lambda]]$, l'espace des séries formelles à coefficients dans l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs complexes à support compact), et $\omega : \mathcal{A}' \to C$ une fonction C-linéaire. ω est dite *réelle* ssi $\omega(\overline{f}) = \overline{\omega(f)}$ et *positive* ssi

$$\omega(\overline{f} * f) \geq 0 \quad \text{quel que soit f} \in \mathrm{A}' \tag{8.2}$$

où la relation $\geq$ est celle dans $R \subset C$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour une forme linéaire réelle positive,

$$\overline{\omega(\overline{f} * g)}\ \omega(\overline{f} * g) \leq \omega(\overline{f} * f)\ \omega(\overline{g} * g), \tag{8.3}$$

il s'ensuit que *l'idéal de Gel'fand*,

$$\mathcal{I}_\omega := \{\{ \in \mathcal{A}' \mid \omega(\overline{\{} * \{) = \prime\} \tag{8.4}$$

est un idéal gauche de $\mathcal{A}$. L'espace quotient

$$\mathcal{H}_\omega := \mathcal{A}'/\mathcal{I}_\omega \tag{8.5}$$

(pour lequel on note $f \mapsto \psi_f$ la projection canonique) est un $\mathcal{A}$-module gauche de façon naturelle

$$\rho_\omega(f)\psi_g := \psi_{f*g}. \tag{8.6}$$

En outre $\mathcal{H}_\omega$ est muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ à valeurs dans C défini par

$$\langle \psi_f, \psi_g \rangle := \omega(\overline{f} * g) \tag{8.7}$$

avec les propriétés de sequilinéarité et positivité ($\langle \psi_f, \psi_f \rangle > 0$ quel que soit $\psi_f \neq 0$), et la représentation ρ_ω satisfait

$$\langle \rho_\omega(f)\psi_g, \psi_h \rangle = \langle \psi_g, \rho_\omega(\overline{f})\psi_h \rangle. \tag{8.8}$$

Alors $\mathcal{H}_\omega$ peut être regardé comme un espace préhilbertien sur l'anneau C et l'algèbre $\mathcal{A}$ se représente dans $\mathcal{H}_\omega$. La construction précédente (qui s'appelle la construction GNS dans le cadre des algèbres stellaires) est indépendante de la nature de $C = R \oplus iR$: les seules choses importantes sont les faits que R est un anneau commutatif unitaire ordonné, que $C = R \oplus iR$ avec $i^2 = -1$ et que $(\mathcal{A}, *)$ est une algèbre associative sur C munie d'un antihomomorphisme antilinéaire involutif $f \mapsto \overline{f}$ (c.-à-d.: $\forall \alpha, \beta \in C$ et $\forall f, g \in \mathcal{A}$ on a $\overline{\alpha f + \beta g} = \overline{\alpha}\overline{f} + \overline{\beta}\overline{g}$ et $\overline{f * g} = \overline{g} * \overline{f}$).

Un exemple simple est donné par la variété symplectique $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k)$ (où $j : Q = \mathbb{R}^\ltimes \to \mathbb{M} : (\shortmid\shortmid_\Bbbk, \ldots, \shortmid\shortmid_\ltimes) \mapsto (\shortmid\shortmid_\Bbbk, \ldots, \shortmid\shortmid_\ltimes, \nvdash, \ldots, \nvdash)$ désigne l'espace des configurations), $\mathcal{A} := (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})[[\lambda]], *_w)$,

$$\mathcal{A}' := \{\sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r f_r \mid f_r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}) \text{ et } \mathrm{supp}(\mathrm{f_r}) \cap \mathrm{Q} \text{ est compact}\} \tag{8.9}$$

et la fonction linéaire ω

$$\omega : \mathcal{A}' \to \mathbb{C}[[\lambda]] : f \mapsto \int_Q d^n q\ f\big(j(q)\big). \tag{8.10}$$

On peut montrer que ω est positive et que $\mathcal{H}_\omega$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{C}^\infty{}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ muni du produit scalaire L^2 standard, c.-à-d.

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_Q d^n q\ \overline{\phi_1(q)}\phi_2(q)$$

et la représentation ρ_ω est égale à ρ_w (voir (4.16) dans le cas $n = 1$) ce qui est une espèce de représentation de Schrödinger sur les fonctions d'onde définies sur l'espace des configurations (voir[17] pour plus de détails).

Il y a beaucoup d'autres exemples de représentations de physique qui se formulent dans le cadre des représentations GNS formelles précédentes comme la représentation de Schrödinger pour un fibré cotangent T^*Q d'une variété différentiable arbitraire Q (voir le paragraphe prochain et[14] et[13] pour plus de détails où se trouve également le cas de la représentation semiclassique WKB) et la représentation dans un fibré en droites complexes holomorphe pour des monopôles magnétiques (voir[15]). Dans ce domaine, surtout Stefan Waldmann a continué la recherche, voir par exemple[78].

C. Fibrés cotangent

Soit Q une variété différentiable arbitraire de dimension n, $\tau_Q^* : T^*Q \to Q$ son fibré cotangent, $i : Q \to T^*Q$ la section nulle et ∇^Q une connection sans torsion dans le fibré tangent de Q. La généralisation directe de la représentation standard ρ_s dans Diffop($\mathbb{R}$)[[λ]] (voir eqn (4.8) est la suivante où $f \in \mathcal{C}^\infty(T^*Q, \mathbb{C})[[\lambda]]$ et $\phi \in \mathcal{C}^\infty(Q, \mathbb{C})[[\lambda]]$

$$\rho_s(f)\phi := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda/i)^r}{r!} \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} i^*\big(\frac{\partial f}{\partial p_{i_1} \cdots \partial p_{i_r}}\big) \ \ (\nabla^Q)^{(r)}_{\big(\frac{\partial}{\partial q^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial q^{i_r}}\big)}\phi, \tag{8.11}$$

où on a utilisé une carte (q,p) pour rendre l'expression moins encombrante et $(\nabla^Q)^{(r)}$ désigne la r^{me} dérivée covariante de ϕ, c.-à-d. quels que soient les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_{r+1} \in \Gamma(TQ)$:

$$\begin{aligned}
(\nabla^Q)^{(1)}_{X_1}\phi &:= L_{X_1}\phi = X_1\phi \\
(\nabla^Q)^{(r+1)}_{(X_1,\ldots,X_{r+1})}\psi &:= (\nabla^Q)^{(1)}_{X_1}\big((\nabla^Q)^{(r)}_{(X_2,\ldots,X_{r+1})}\phi\big) \\
&\quad - \sum_{k=2}^{r+1} (\nabla^Q)^{(r)}_{(X_2,\ldots,X_{k-1},\nabla^Q_{X_1}X_k,X_{k+1},\ldots,X_{r+1})}\phi.
\end{aligned}$$

On peut montrer à l'aide de la construction de Fedosov qu'il existe un star-produit $*_s$ sur la variété symplectique (T^*Q, ω_0) (voir paragraphe II B 1) –qui est d'une certaine manière défini par eqn (8.11), voir[14],[13]–, tel que ρ_s est une représentation de $\big(\mathcal{C}^\infty(T^*Q,\mathbb{C}), *_s)[[\lambda]], *_s\big)$ dans Diffop(Q)[[λ]].

Il y a aussi une possibilité (nonunique) de définir un analogue au star-produit Weyl-Moyal $*_w$ (voir (4.18)) à l'aide d'une série opérateurs différentiels, N, due à N.Neumaier, qui généralise l'application N (eqn (4.17)) du paragraphe IV B:

Soit R^Q le tenseur de courbure de ∇^Q. On fixe un champ de densités positives μ sur Q. Alors il y a une 1-forme unique α sur Q définie par $\nabla^Q\mu =: \alpha\mu$, et l'on calcule $d\alpha = -\mathrm{trace}R^Q$. On considère l'opérateur différentiel

$$\Delta := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial q^k \partial p_k} + \sum_{j,k,l=1}^{n} (\tau_Q^*)^*\Gamma^j_{kl} p_j \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} + \sum_{k,l=1}^{n} (\tau_Q^*)^*\Gamma^k_{kl} \frac{\partial}{\partial p_l} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial}{\partial p_k} \tag{8.12}$$

(où $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k dq^k$ et $\Gamma^j_{kl} := dq^j(\nabla^Q_{\frac{\partial}{\partial q^k}} \frac{\partial}{\partial q^k}$ désignent les symboles de Christoffel de la connection ∇^Q) qui ne dépend pas de la carte choisie (en fait, la somme des premiers trois termes constituent le Laplacien de la métrique semi-riemannienne sur T^*Q obtenue par l'accouplement naturel entre les champs de vecteurs horizontaux (définis par la connection ∇^Q) et les champs de vecteurs verticaux) et l'on pose

$$N := e^{\frac{\lambda}{2i}\Delta}. \tag{8.13}$$

Alors le star-produit

$$f *_w g := N^{-1}\big((Nf) *_s (Ng)\big) \tag{8.14}$$

est symétrique et est représenté par

$$\rho_w(f) := \rho_s(Nf). \tag{8.15}$$

Cette représentation est GNS: on définie la fonction linéaire positive ω_μ sur l'idéal bilatère $C_0^\infty(T^*Q, \mathbb{C})[[\lambda]]$ de $C^\infty(T^*Q, \mathbb{C})[[\lambda]]$:

$$\omega_\mu(f) := \int_Q \mu(i^*f) \ \ \forall f \in C_0^\infty(T^*Q, \mathbb{C})[[\lambda]] \ \ . \tag{8.16}$$

On a montré[14,13] que ω_μ est positive, que l'idéal de Gel'fand est donné par l'image par N^{-1} du sous-espace de toutes les fonctions appartenant à $C_0^\infty(T^*Q, \mathbb{C})[[\lambda]]$ qui s'annulent sur Q, et que l'espace préhilbertien $\mathcal{H}_{\omega_\mu}$ de la construction GNS est isométrique en tant que $C^\infty(T^*Q)[[\lambda]]$-module à $C_0^\infty(Q)[[\lambda]]$ (muni du produit scalaire L^2 moyennant μ) via $\psi_f \mapsto i^*(Nf)$ quelle que soit $f \in C_0^\infty(T^*Q, \mathbb{C})[[\lambda]]$. La représentation ρ_w mentionnée ci-dessus coïncide avec la représentation GNS.

IX. GÉOMÉTRIE DE POISSON II

Pour préparer la discussion de la déformation (ou quantification) des morphismes de Poisson, je rappelle quelques propriétés des variétés de Poisson et des applications intéressantes entre elles (voir[76],[61],[80],[11],[24],[37],[43],[50],[54],[60],[79]).

A. Applications de Poisson

Définition IX.1 *Soient (M,P) et (M',P') deux variétés de Poisson. Une application $\Phi : M \to M'$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'appelle* application de Poisson *ssi P et P' sont Φ-liées, c.-à-d.*

$$T_m\Phi \otimes T_m\Phi\big(P_m\big) = P'_{\Phi(m)} \text{ quel que soit m} \in \text{M}.$$

La proposition suivante est une conséquence directe de la définition:

Proposition IX.1 *Soit $\Phi : (M,P) \to (M',P')$ une application de Poisson entre deux variétés de Poisson.*
Alors l'application $\Phi^* : \mathcal{C}^\infty(M',\mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C}) : g \mapsto g\circ\Phi$ est un homomorphisme d'algèbres de Poisson, c.-à-d.:

$$\Phi^*(g_1g_2) = (\Phi^*g_1)(\Phi^*g_2)$$
$$\Phi^*\{g_1,g_2\}' = \{\Phi^*g_1, \Phi^*g_2\}$$

quelles que soient $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^\infty(M',\mathbb{C})$.

1. Applications moment

L'outil principal pour la description des symétries dans le cadre des variétés de Poisson et celui des application moment:
Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie et $\mathfrak{g}^*$ son espace dual.

Définition IX.2 *Soit (M,P) une variété de Poisson. Une application $J : M \to \mathfrak{g}^*$ s'appelle* application moment (pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$) *ssi*

$$\{\langle J,x\rangle, \langle J,y\rangle\} = \langle J,[x,y]\rangle \text{ quels que soient x, y} \in \mathfrak{g}$$

Cette définition entraîne évidemment la proposition suivante:

Proposition IX.2 *Toute application moment est une application de Poisson $(M,P) \to (\mathfrak{g}^*, P_{\mathfrak{g}})$.*

La définition classique d'une application moment par J.-M. Souriau commence par une action gauche d'une groupe de Lie G sur M, $G\times M \to M : (g,m) \mapsto gm =: \Phi_g(m)$ telle que 1. l'algèbre de Lie de G soit égale à $\mathfrak{g}$, 2. l'action préserve la structure de Poisson, c.-à.-d. toutes les Φ_g sont des application de Poisson, 3. il existe une application moment $J : M \to \mathfrak{g}^*$ comme dans définition IX.2, 4. les champs hamiltoniens $X_{\langle J,x\rangle}$ coïncident avec les générateurs infinitésimaux $x_M(m) := d/dt\big(exp(tx)m\big)|_{t=0}$ et 5. J est G-équivariante: $J(gm) = Ad^*(g)\big(m\big)\ \ \forall\ g \in G$. Ici, propriétés 4. et 5. impliquent propriété 3.

2. Systèmes intégrables

Définition IX.3 *Soit (M,ω,H) un système hamiltonien sur une variété symplectique (M,ω) de dimension $2n$. Il est dit* complètement intégrable (dans le sens de Liouville) *ss'il existe n fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ $F_1,\ldots,F_n : M \to \mathbb{R}$ telles que*

1. *Les fonctions $F_1,\ldots,F_n$ sont des intégrales premières, c.-à-d. $\{H,F_i\} = 0$* quel que soit $1 \leq \text{i} \leq \text{n}$,

2. *les fonctions $F_1, \ldots, F_n$ sont en involution, c.-à-d. $\{F_i, F_j\} = 0$ quels que soient $1 \leq i, j \leq n$,*

3. *$F_1, \ldots, F_n$ sont indépendantes, c.-à-d. la mesure (par rapport à la forme de volume $\omega^{\wedge n}$) de l'ensemble singulier $S := \{m \in M \mid dF_1(m) \wedge \cdots \wedge dF_n(m) = 0\}$ s'annule, et*

4. *il existe une fonction $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $H(m) = h\big(F_1(m), \ldots, F_n(m)\big)$ quel que soit $m \in M$.*

Le nom 'intégrabilité' provient du fait qu'il y a une procédure algébrique due à Liouville de trouver des coordonnées locales $(Q_1, \ldots, Q_n)$ autour de tout point régulier de l'application $F := (F_1, \ldots, F_n)$ telles que les coordonnées $(Q_1, \ldots, Q_n, F_1, \ldots, F_n)$ forment une carte de Darboux: les solutions des équations d'Hamilton se simplifient drastiquement:

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial h}{\partial F_k}(F) =: \alpha_k(F)$$
$$\frac{dF_k}{dt} = 0$$

alors

$$\big(Q(t), F(t)\big) = \big(Q(0) + t\alpha(F(0)), F(0)\big).$$

Les sous-variétés $F^{-1}(\mu)$ pour des valeurs régulières $\mu \in \mathbb{R}^n$ sont invariantes par le flot de H, et au cas où elles sont compactes et connexes elles sont difféomorphes au tore $S^1 \times \cdots \times S^1$ (Théorème de Liouville-Arnol'd, voir[4], p.271-285, ou[1], p.392-400).

On vérifie rapidement l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens (M, ω, H) importants suivants:

1. *La particule libre dans $\mathbb{R}^n$*: $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k)$ et

$$H(q,p) := \frac{1}{2}\sum_{k_1}^{n} p_k^2 \tag{9.1}$$
$$F_k(q,p) := p_k \quad \forall 1 \leq k \leq n. \tag{9.2}$$

2. *L'oscillateur harmonique dans $\mathbb{R}^n$*: $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k)$ et

$$H(q,p) := \frac{1}{2}\sum_{k_1}^{n} \big(p_k^2 + q_k^2\big) \tag{9.3}$$
$$F_k(q,p) := \frac{1}{2}\big(p_k^2 + q_k^2\big) \quad \forall 1 \leq k \leq n. \tag{9.4}$$

3. *Le flot géodésique sur la sphère S^n* (voir section VII A): on commence par $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}, \sum_{k=1}^{n+1} dq_k \wedge dp_k)$ et

$$H(q,p) := \frac{1}{2}\sum_{l,l'=1}^{n+1} \big(q_l^2 p_{l'}^2 - q_l p_l q_{l'} p_{l'}\big) \tag{9.5}$$
$$F_1(q,p) := \sum_{l=1}^{n+1} q_l p_l \tag{9.6}$$
$$F_k(q,p) := \frac{1}{2}\sum_{l,l'=1}^{k} \big(q_l^2 p_{l'}^2 - q_l p_l q_{l'} p_{l'}\big) \quad \forall 2 \leq k \leq n+1. \tag{9.7}$$

Etant invariantes par le groupe G de dimension 2 (voir (7.6)) ces fonctions se restreignent bien sur la sous-variété symplectique T^*S^n (donnée par $F_1(q,p) = 0$ et $\sum_{l=1}^{n+1} q_l^2 = 1$) où $F_2, \ldots, F_{n+1} = H$ définissent un système intégrable qui représente le flot géodésique sur S^n dont les solutions sont des grands cercles paramétrés avec leurs vitesses.

Il est clair que chaque système intégrable est un cas particulier d'une application moment

$$J : M \to \mathbb{R}^{n*} : m \mapsto \big(F_1(m), \ldots, F_n(m)\big) \tag{9.8}$$

où $\mathbb{R}^n$ est considérée comme une algèbre de Lie abélienne (c.-à-d. où tous les crochets s'annulent).

B. Sous-variétés et applications coïsotropes

Soit M une variété différentiable. Soit E un sous-espace vectoriel de l'espace tangent T_mM au point $m \in M$. On note

$$E^{\mathrm{ann}} := \{\alpha \in T_mM^* \mid \alpha(v) = 0 \ \forall v \in E\} \tag{9.9}$$

l'espace annihilateur de E.

Définition IX.4 *Soient* (M, P) *une variété de Poisson et* C *une variété quelconque et* $\Phi : C \to M$ *une application de classe* $\mathcal{C}^\infty$.

1. Φ *s'appelle* coïsotrope *ssi*

$$P_{\Phi(c)}(\alpha, \beta) = 0 \text{ quels que soient } \mathrm{c} \in \mathrm{C}; \alpha, \beta \in (\mathrm{T_c\Phi\ T_cC})^{\mathrm{ann}}.$$

2. *En particulier, si* Φ *est l'injection canonique d'une sous-variété fermée* C *de* M*, alors* C *s'appelle* sous-variété coïsotrope *quand* Φ *est coïsotrope.*

Il est immédiat que l'application identique d'une variété de Poisson est une application coïsotrope.

Pour une variété symplectique (M, ω) et un sous-espace E d'un espace tangent T_mM il y a la notion du sous-espace ω-orthogonal

$$E^\omega := \{w \in T_mM \mid \omega_m(v, w) = 0 \ \forall v \in E\}, \tag{9.10}$$

et l'on en déduit aisément la

Proposition IX.3 *Soit* (M, ω) *une variété symplectique et* C *une sous-variété fermée de* M*. Alors* C *est coïsotrope ssi*

$$T_cC^\omega \subset T_cC \text{ quel que soit } \mathrm{c} \in \mathrm{C}.$$

Remarque: Si une sous-variéte coïsotrope C d'une variété symplectique (M, ω) est telle que

$$T_cC^\omega = T_cC \text{ quel que soit } \mathrm{c} \in \mathrm{C}. \tag{9.11}$$

elle est appelée *sous-variété lagrangienne*. Les sous-variétés lagrangiennes jouent un rôle principal dans la théorie du *développement semiclassique* des opérateurs différentiels, voir par exemple[6].

Proposition IX.4 *Soient* (M, P) *et* (M', P') *des variétés de Poisson,* $\Phi : M \to M'$ *une application de Poisson et* C' *une sous-variété coïsotrope de* M' *qui soit transverse à* Φ*, c.-à-d.* $T_m\Phi(T_mM) + T_{\Phi(m)}C' = T_{\Phi(m)}M'$ *quel que soit* $m \in M$.
Alors l'image réciproque $C := \Phi^{-1}(C')$ *est une sous-variété coïsotrope de* M.

Démonstration: Grâce à la transversalité de Φ et C' il s'ensuit que C est une sous-variété de M qui a la même codimension que C'. Soit $c \in C$ et $\alpha', \beta' \in T_{\Phi(c)}C'^{\mathrm{ann}}$. Alors, puisque $T_c\Phi\ v \in T_{\Phi(c)}C'$ quel que soit $v \in T_cC$ il s'ensuit que $\alpha := \alpha' \circ T_c\Phi$ et $\beta := \beta' \circ T_c\Phi$ sont des éléments de T_cC^{ann}. Si $\alpha = 0$ alors α' s'annule sur $T_c\Phi(T_cM)$ et sur $T_{\Phi(c)}C'$, donc $\alpha' = 0$ grâce au fait que Φ et C' sont transverses. Alors les élements de T_cC^{ann} sont tous de la forme $\alpha = \alpha' \circ T_c\Phi$. On calcule

$$P_c(\alpha, \beta) = P_c(\alpha' \circ T_c\Phi, \alpha' \circ T_c\Phi) = (T_c\Phi \otimes T_c\Phi)(P_c)(\alpha', \beta') = P'_{\Phi(c)}(\alpha', \beta') = 0,$$

et C est coïsotrope. □

Proposition IX.5 *Soient (M,P) et (M',P') deux variétés de Poisson et C une variété quelconque. Soit $\Psi : C \to (M,P)$ une application coïsotrope et $\Phi : (M,P) \to (M',P')$ une application de Poisson.*
Alors la composée $\Phi \circ \Psi : C \to M'$ est une application coïsotrope.
En particulier, le cas $C = M$ et $\Psi = 1_M$ montre que toute application de Poisson est une application coïsotrope.

Démonstration: Soient $c \in C$ et $\alpha', \beta' \in T_{\Phi(\Psi(c))}{M'}^*$ telles que $\alpha' \circ T_c(\Phi \circ \Psi) = 0$ et $\beta' \circ T_c(\Phi \circ \Psi) = 0$. Alors $\alpha \circ T_c\Psi := \big(\alpha' \circ T_{\Psi(c)}\Phi\big) \circ T_c\Psi = 0$ et $\beta \circ T_c\Psi := \big(\beta' \circ T_{\Psi(c)}\Phi\big) \circ T_c\Psi = 0$. Puisque Ψ est coïsotrope il s'ensuit:

$$\begin{aligned} 0 = P_{\Psi(c)}(\alpha,\beta) &= P_{\Psi(c)}(\alpha' \circ T_{\Psi(c)}\Phi, \beta' \circ T_{\Psi(c)}\Phi) \\ &= \big(T_{\Psi(c)}\Phi \otimes T_{\Psi(c)}\Phi\big)(P_{\Psi(c)})(\alpha',\beta') = P'_{\Phi(\Psi(c))}(\alpha',\beta') \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\Phi \circ \Psi$ est coïsotrope. □

Soit (M,P) une variété de Poisson. On a les exemples des sous-variétes coïsotropes suivants:

1. La variété M elle-même.
2. Si $m_0 \in M$ tel que $P_{m_0} = 0$, alors $C := \{m_0\}$ est coïsotrope.
3. Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie et $i : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ une sous-algèbre. Alors la restriction $i^* : (\mathfrak{g}^*, P_{\mathfrak{g}}) \to (\mathfrak{h}^*, \mathfrak{P}_{\mathfrak{h}})$ est une application de Poisson et une submersion surjective, $\{0\} \subset \mathfrak{h}^*$ est une sous-variété coisotrope de $(\mathfrak{h}^*, \mathfrak{P}_{\mathfrak{h}})$, alors
$$\mathfrak{h}^{\mathrm{ann}} := \{\xi \in \mathfrak{g}^* \mid \xi(\mathfrak{y}) = \mathfrak{o}\ \forall \mathfrak{y} \in \mathfrak{h}\} \tag{9.12}$$
est une sous-variété coïsotrope de $(\mathfrak{g}^*, P_{\mathfrak{g}})$ selon proposition IX.4.
4. Soit $J : (M,P) \to (\mathfrak{g}^*, P_{\mathfrak{g}})$ une application moment dont $0 \in \mathfrak{g}^*$ est une valeur régulière. Alors $C := J^{-1}(0)$ est une sous-variété coïsotrope de (M,P) d'après proposition IX.4.
5. Dans la variété de Poisson $(M \times M, P_{(1)} - P_{(2)})$ (voir proposition II.5) la diagonale $\Delta(M) := \{(m,m) \mid m \in M\}$ est une sous-variété coïsotrope.
6. Soit $\Phi : (M,P) \to (M',P')$ une application de Poisson. Alors son graphe
$$C := \{\big(\Phi(m), m\big) \in M' \times M \mid m \in M\} \tag{9.13}$$
est une sous-variété coïsotrope de la variété de Poisson $(M' \times M, P'_{(1)} - P_{(2)})$: en fait, $id_{M'} \times \Phi : (M' \times M, P'_{(1)} - P_{(2)}) \to (M' \times M', P'_{(1)} - P'_{(2)}) : (m', m) \mapsto \big(m', \Phi(m)\big)$ est une application de Poisson, et $C = (id_{M'} \times \Phi)^{-1}\big(\Delta(M')\big)$ (A.Weinstein[80]).

On note que toute structure de Poisson définit un homomorphisme de fibrés vectoriels

$$P^\sharp : T^*M \to TM : \alpha_p \mapsto P^\sharp_p(\alpha_p) := P_p(\alpha_p,\ \ ) \tag{9.14}$$

avec l'identification naturelle $T_pM^{**} = T_pM$.

Proposition IX.6 *Soit C une sous-variété coïsotrope d'une variété de Poisson (M,P).*
Alors la distribution $E := \cup_{c\in C} P^\sharp_c\big(T_cC^{ann}\big)$ est lisse et involutive, c.-à-d. si deux champs de vecteurs X, Y sur C prennent leur valeurs dans E, alors il en est de même pour leur crochet $[X,Y]$.

On obtient la caractérisation algébrique des sous-variétés coïsotropes suivante:

Proposition IX.7 *Soit (M,P) une variété de Poisson et C une sous-variété fermée de M. Soit I_C* l'idéal annulateur de *C, c.-à-d.*

$$I_C := \{f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C}) \mid f(c) = 0\ \forall c \in C\}.$$

Alors C est une sous-variété coïsotrope si et seulement si I_C est une sous-algèbre de Poisson, c.-à-d.:

$$\mathrm{Si\ f, g \in I_C\ alors\ \{f, g\} \in C.}$$

Voir[76], p.99, Prop.7.6 pour une démonstration.

C. Réduction symplectique

Dans ce sous-paragraphe on ne traite que les variétés symplectiques (pour des généralisations voir[61]):

Soit $i : C \to M$ une sous-variété coïsotrope d'une variété symplectique (M, ω). Ici la distribution E de proposition IX.6 est égal au sous-fibré $TC^\omega := \cup_{c \in C} T_c C^\omega$ (voir proposition IX.3. Le feuilletage $\mathcal{F}$ correspondant au fibré intégrable E s'obtient à l'aide du théorème classique de Frobenius, voir[59], p. 28, Thm.3.25. Supposons que l'espace des feuilles $M_{red} := C/\mathcal{F}$ est muni d'une structure différentiables compatible avec la topologie quotient telle que la projection canonique $\pi : C \to M_{red}$ soit une submersion surjective. Alors on a le théorème classique suivant:

Théorème IX.1 *Avec les hypothèses mentionnées ci-dessus, l'espace quotient M_{red} est muni d'une structure symplectique canonique, ω_{red}, définie par*

$$i^* \omega =: \pi^* \omega_{red}.$$

La variété symplectique (M_{red}, ω_{red}) s'appelle la variété symplectique réduite.

Voir[1], p. 416, Thm. 5.3.23, pour une démonstration.

Un cas particulier important s'obtient par une application moment $J : M \to \mathfrak{g}^*$ pour laquelle 0 est une valeur régulière dont l'image réciproque $C := J^{-1}(0)$ n'est pas vide. Dans ce cas-là, C est une sous-variété coïsotrope, et la variété réduite (au cas où elle existe) s'obtient en tant qu'espace quotient du groupe de Lie G (à algèbre de Lie $\mathfrak{g}$) agissant de façon libre et propre sur C. Cette construction importante et extrêmement utile est appelée la *réduction de Marsden-Weinstein*[62]. Par exemple l'espace projectif complexe s'obtient en tant que variété symplectique réduite de $M = \mathbb{R}^{2n+2}, \omega = \sum_{k=1}^{n+1} dq^k \wedge dp_k$ à l'aide de l'application moment $J(q,p) := \frac{\sum_{k=1}^{n+1}(q_k^2 + p_k^2)}{2} - \frac{1}{2}$ pour l'action du groupe $U(1)$ sur $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$.

X. QUANTIFICATION DES APPLICATIONS DE POISSON ET DES PLONGEMENTS COÏSOTROPES?

Dans ce paragraphe je voudrais bien discuter quelques questions –à ma connaissance ouvertes– et quelques-uns de mes résultats au sujet de la quantification des applications de Poisson et des sous-variétés coïsotropes des variétés de Poisson.

A. Homomorphismes de star-produits

Définition X.1 *Soient (M, P) et (M', P') deux variétés de Poisson munies des star-produits $*$ et $*'$, respectivement.*
Une application $\mathbb{C}[[\lambda]]$-linéaire $\Phi : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})[[\lambda]] \to \mathcal{C}^\infty(M', \mathbb{C})[[\lambda]]$ est appelée homomorphisme de star-produits *ssi Φ est un homorphisme d'algèbres associatives unitaires sur $\mathbb{C}[[\lambda]]$:*

$$\Phi(F * G) = \big(\Phi(F)\big) *' \big(\Phi(G)\big)$$

quels que soient $F, G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})[[\lambda]]$.

Le lien avec les applications de Poisson est contenu dans le lemme suivant:

Lemme X.1 *Soit $\Phi = \sum_{r=0}^\infty \lambda^r \Phi_r : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})[[\lambda]] \to \mathcal{C}^\infty(M', \mathbb{C})[[\lambda]]$ un homomorphisme de star-produits.*
Alors il existe une application de Poisson $\phi : (M', P') \to (M, P)$ telle que $\Phi_0(f) = \phi^* f := f \circ \phi$ quelle que soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$.

Démonstration: Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$. La propriété d'homomorphisme de Φ s'écrit à l'ordre 0 de λ:

$$\Phi_0(fg) = \big(\Phi_0(f)\big)\big(\Phi_0(g)$$

Alors Φ_0 est un homomorphisme d'algèbres commutatives associatives unitaires $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(M',\mathbb{C})$. D'après l'exercice de Milnor (voir[59], p. 301, Cor. 35.9) il existe une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ $\phi : M' \to M$ telle que $\Phi_0(f) = \phi^* f$. Ensuite, le commutateur de la propriété d'homomorphismes à l'ordre 1 de λ s'écrit

$$\Phi_0\{f,g\} = \{\Phi_0(f), \Phi_0(g)\}$$

d'où le fait que ϕ est une application de Poisson. □

La question réciproque de savoir quand une application de Poisson donnée se déforme dans un homomorphisme de star-produits est sans doute intéressante:

Problème X.1 *Quelles sont les conditions sur une application de Poisson $\phi : (M',P') \to (M,P)$ pour qu'il existent des star-produits $*'$ et $*$ sur les variétés de Poisson (M',P') et (M,P), respectivement, et des applications linéaires $\Phi_1, \Phi_2, \ldots : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(M',\mathbb{C})$ tels que*

$$\Phi := \phi^* + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r \Phi_r$$

soit un homomorphisme de star-produits?

1. Applications moment quantiques et systèmes intégrables quantiques

Un cas particulier très important est donné par les applications moments $J : M \to \mathfrak{g}^*$ (voir paragraphe IX A 1). Puisque J est une application de Poisson on peut spécifier problème X.1 de façon suivante:

Problème X.2 *Quelles sont les conditions sur une application moment $J : M \to \mathfrak{g}^*$ pour qu'il existent un star-produit $*$ sur la variété de Poisson (M,P) et des applications linéaires $\Phi_1, \Phi_2, \ldots : \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*,\mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ tels que*

$$\Phi := J^* + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r \Phi_r$$

soit un homomorphisme de star-produits si la variété de Poisson $(\mathfrak{g}^*, P_\mathfrak{g})$ (voir eqn (2.23)) est munie du star-produit BCH (théorème VII.3)?

Si l'on définit les applications $\mathbb{J}_r : M \to \mathfrak{g}^*$, $r \in Nature(London)$ par ($\xi \in \mathfrak{g}$):

$$\mathbb{J}_0 := J \quad \text{et} \quad \langle \mathbb{J}_\mathrm{r}, \xi\rangle := \Phi_\mathrm{r}(\tilde{\xi}) \tag{10.1}$$

où $\tilde{\xi} : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{C} : \alpha \mapsto \langle \alpha, \xi\rangle$, il résulte de la propriété d'homomorphismes de Φ et du fait que $\tilde{\xi} * \tilde{\eta} - \tilde{\eta} * \tilde{\xi} = i\lambda\widetilde{[\xi,\eta]}$ (voir thm VII.3):

$$\langle \mathbb{J}, \xi\rangle * \langle \mathbb{J}, \eta\rangle - \langle \mathbb{J}, \eta\rangle * \langle \mathbb{J}, \xi\rangle = i\lambda \langle \mathbb{J}, [\xi,\eta]\rangle. \tag{10.2}$$

Une série formelle de fonctions $\mathbb{J} \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})[[\lambda]]$ satisfaisant eqn (10.2) s'appelle une *application moment quantique* d'après Xu[82]. Si $\mathbb{J} = J = \mathbb{J}_0$ le star-produit $*$ s'appelle $\mathfrak{g}$-*covariant* d'après Arnal, Cortet, Molin et Pinczon[2]. Plus particulièrement, un star-produit $*$ s'appelle *fortement* $\mathfrak{g}$-*invariant* d'après ces auteurs si

$$\langle \mathbb{J}, \xi\rangle * f - f * \langle \mathbb{J}, \xi\rangle = i\lambda \{\langle \mathbb{J}, \xi\rangle, f\} \tag{10.3}$$

quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})[[\lambda]$. On a le critère suffisant suivant pour l'existence de ces star-produits:

Théorème X.1 (Fedosov,1996) *Soit (M,ω) une variété symplectique, $J : M \to \mathfrak{g}^*$ une application moment et ∇ une connection dans le fibré tangent telle que*

$$0 = \left(L_{X_{\langle J,\xi\rangle}} \nabla\right)_X Y := [X_{\langle J,\xi\rangle}, \nabla_X Y] - \nabla_{[X_{\langle J,\xi\rangle}, X]} Y - \nabla_X [X_{\langle J,\xi\rangle}, Y].$$

quel que soit ξ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors il existe un star-produit fortement $\mathfrak{g}$-invariant $*$.

Voir[42] pour la démonstration. Par exemple, si les flots des champs de vecteurs $X_{\langle J,\xi\rangle}$ définissent l'action d'un groupe de Lie compacte ou plus généralement une action propre d'un groupe de Lie, il résulte d'un théorème classique de R.Palais que ces champs de vecteurs préservent une métrique riemannienne sur M, alors sa connection Levi-Civita, et le théorème de Fedosov est applicable.

Puisque les systèmes hamiltoniens intégrables constituent une sous-classe des applications moment (voir paragraphe IX A 2 et eqn (9.8)) on peut appeler un système hamiltonien (M,ω,H) un *système intégrable quantique* ss'il ya une application $\mathbb{F}=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r\mathbb{F}_r \ \in\mathbb{R}^n\otimes\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})[[\lambda]]$ telle que $\big(M,\omega,H,\mathbb{F}_0=:F=:(F_1,\ldots,F_n)\big)$ soit un système intégrable classique et

$$\mathbb{F}_k*\mathbb{F}_l-\mathbb{F}_l*\mathbb{F}_k=0 \tag{10.4}$$

quels que soient $1\leq k,l\leq n$. La plupart des systèmes hamiltoniens intégrables connus sont aussi intégrables quantiques, par exemple tous les exemples mentionnés en paragraphe IX A 2 si l'on choisit $*=*_w$ et $\mathbb{F}=F$ ou les exemples de[12].

B. Représentations de star-produits II

On rappelle la définition d'une représentation de star-produit du paragraphe VIII dans Définition VIII.1: ceci était un homomorphisme d'algèbres associatives entre l'algèbre $(\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})[[\lambda]],*)$ ((M,P) étant une variété de Poisson munie d'un star-produit $*$) et l'algèbre d'opérateurs différentiels sur une variété différentiable C.

Le lien entre les représentations de star-produits et les sous-variétés coïsotropes est contenu dans la proposition suivante:

Proposition X.1 *Soit (M,P) une variété de Poisson munie d'un star-produit $*$, C une variété différentiable et*

$$\rho=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r\rho_r:\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})[[\lambda]]\to\mathrm{Diffop(C)}[[\lambda]]$$

une représentation de star-produits.
Alors il existe une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, $i:C\to M$ telle que $\rho_0(f)(\psi)=(i^*f)\psi:=(f\circ i)\psi$ quelles que soient $f\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ et $\psi\in\mathcal{C}^\infty(C,\mathbb{C})$.
Ensuite, au cas où i est un plongement sur une sous-variété fermée $i(C)$ de M, alors $i(C)$ est une sous-variété coïsotrope.

Démonstration: La propriété de représentation s'écrit à l'ordre 0: $\rho_0(f)\rho_0(g)=\rho_0(fg)$. Donc ρ_0 est un homomorphisme de l'algèbre associative commutative $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ dans l'algèbre associative Diffop(C). Puisque $\rho_0(1)=$ l'application identique, alors ρ_0 envoie des fonctions qui ne s'annulent nulle part sur des opérateurs différentiels inversibles. Si l'on regarde le symbole standard (voir paragraphe V E) d'un opérateur différentiel inversible dans des coordonnées locales, on voit qu'il ne contient aucune puissance strictement positive d'une dérivée partielle. Alors, un tel opérateur différentiel prend la forme $\psi\mapsto\chi\psi$ où $\chi\in\mathcal{C}^\infty(C,\mathbb{C})$. Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. Alors la fonction $1+f^2$ est un élément inversible dans l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$. Par conséquent, il existe une fonction $\chi\in\mathcal{C}^\infty(C,\mathbb{R})$ telle que

$$\psi+\rho_0(f)^2(\psi)=\rho_0(1+f^2)(\psi)=\chi\psi$$

quelle que soit $\psi\in\mathcal{C}^\infty(C,\mathbb{C})$. Il s'ensuit qu'il existe une fonction $\chi'\in\mathcal{C}^\infty(C,\mathbb{C})$ telle que $\rho(f)(\psi)=\chi'\psi$. Pour une fonction à valeurs complexes on arrive à la même conclusion tout en séparant en partie réelle et partie imaginaire. Alors il existe un homomorphisme d'algèbres associatives commutatives $\tilde{\rho}_0:\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})\to\mathcal{C}^\infty(C,\mathbb{C})$ tel que $\rho_0(f)\psi=\tilde{\rho}_0(f)\ \psi$. D'après l'exercice de Milnor (voir[59], p. 301, Corollary 35.10) il existe une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ $i:C\to M$ telle que $\tilde{\rho}_0(f)=f\circ i$.
Soit i maintenant un plongement. Tout en identifiant C et son image $i(C)$ nous considérons deux fonctions $f,g\in\mathcal{C}^\infty(M,C)$ qui s'annulent sur C. Le commutateur de l'identité de représentation à l'ordre 1 s'écrit

$$[\rho_1(f),\rho_0(g)]-[\rho_1(g),\rho_0(f)]=\rho_0(\{f,g\})$$

Puisque $\tilde{\rho}_0(f)=i^*f=0=i^*g=\tilde{\rho}_0(g)$ il s'ensuit que $\{f,g\}\circ i=0$, alors C est coïsotrope selon proposition IX.7.
□

Encore une fois, la question réciproque de savoir quand l'injection canonique i d'une sous-variété coïsotrope fermée C d'une variété de Poisson donnée se déforme dans une représentation de star-produits me semble aussi intéressante:

Problème X.3 *Quelles sont les conditions sur l'injection canonique $i : C \to (M,P)$ d'une sous-variété coïsotrope fermée C d'une variété de Poisson (M,P) pour qu'il existent un star-produit $*$ sur la variété de Poisson (M,P) et des applications linéaires $\rho_1, \rho_2, \ldots : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C}) \to \mathrm{Diffop(C)}$ tels que*

$$\rho := i^* + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r \rho_r$$

soit une représentation de star-produits?

Ici j'ai utilisé la notation simplifiée $\rho_0 = i^*$ pour $\rho_0(f)(\psi) = (i^* f)\psi$.

1. Lien entre homomorphismes et représentations de star-produits

Soient (M,P) et (M',P') deux variétés de Poisson munies des star-produits $* = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_r$ et $*' = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C'_r$, respectivement. Pour deux entiers positifs s,t on définit dans une carte $(U \times U', x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^{n'})$ l'opérateur bidifférentiel suivant

$$\begin{aligned}&\big(C_s \otimes C'_t\big)(F,G) := \\ &\sum_{a,b=0}^{N_s} \sum_{c,d=0}^{N_t} \sum_{\substack{1\leq i_1,\ldots,i_a\leq n\\ 1\leq j_1,\ldots,j_b\leq n}} \sum_{\substack{1\leq i'_1,\ldots,i'_c\leq n'\\ 1\leq j'_1,\ldots,j'_d\leq n'}} C_s^{(a,b),i_1\cdots i_a,j_1\cdots j_b} \quad {C'}_t^{(c,d),i'_1\cdots i'_c,j'_1\cdots j'_d} \\ &\qquad \frac{\partial^{a+c} F}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_a}\partial y^{i'_1}\cdots\partial y^{i'_c}} \quad \frac{\partial^{b+d} G}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_b}\partial y^{j'_1}\cdots\partial y^{j'_d}}.\end{aligned}$$

quelles que soient $F,G \in \mathcal{C}^\infty(M \times M', \mathbb{C})$. La définition ne dépend pas des cartes choisies. On pose

$$* \otimes *' := \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \sum_{s+t=r} C_s \otimes C'_t$$

ce qui définit évidemment un star-produit sur $(M \times M', P_{(1)} + P'_{(2)})$ (voir Proposition II.5). En outre, on définit la multiplication $*^{\mathrm{opp}}$

$$f *^{\mathrm{opp}} g := g * f \qquad \text{quelles que soient } \mathrm{f,g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{M},\mathbb{C})[[\lambda]]$$

qui est évidemment un star-produit pour la variété de Poisson $(M,-P)$. Le lien entre la quantification des application de Poisson et la quantification des sous-variétés coïsotropes se trouve dans la suivante

Proposition X.2 (M.B. 2000) *Soit $\phi : (M',P') \to (M,P)$ une application de Poisson entre deux variétés de Poisson. Soit $i : C := M' \to M \times M'$ le plongement canonique dans le graphe de ϕ, $\{(\phi(p'),p') := i(p') \in M \times M' \mid p' \in M'\}$ (ce qui est une sous-variété coïsotrope de $(M \times M', P_{(1)} - P'_{(2)}$ d'après le théorème de Weinstein, voir exemple 6 dans paragraphe IX B). On suppose qu'il y ait une représentation de star-produits ρ de $\mathcal{C}^\infty(M \times M', \mathbb{C})[[\lambda]]$ munie du star-produit $* \otimes *'^{\mathrm{opp}}$ dans* $\mathrm{Diffop(C)}[[\lambda]] = \mathrm{Diffop(M')}[[\lambda]]$ *telle que $\rho_0 = i^*$. Soit $r : \mathcal{C}^\infty(M',\mathbb{C})[[\lambda]] \to \mathcal{C}^\infty(M',\mathbb{C})[[\lambda]]$ l'application $r(g) := \rho(1 \otimes g)(1)$ et $l : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})[[\lambda]] \to \mathcal{C}^\infty(M',\mathbb{C})[[\lambda]]$ l'application $l(f) := \rho(f \otimes 1)(1)$.*
Alors r est inversible et

$$\Phi := r^{-1} \circ l : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})[[\lambda]] \to \mathcal{C}^\infty(M',\mathbb{C})[[\lambda]]$$

est un homomorphism de star-produits tel que $\Phi_0 = \phi^*$.

Démonstration: Soient $f, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ et $g, g_1, g_2 \in \mathcal{C}^\infty(M', \mathbb{C})$. On a $r_0(g) = \rho_0(1 \otimes g)(1) = i^*(1 \otimes g) = g$, alors r_0 est l'application identique ce qui entraîne que r est inversible. Ensuite, $l_0(f) = \rho_0(f \otimes 1)(1) = i^*(f \otimes 1) = \phi^* f$, par conséquent $\Phi_0 = (r^{-1} \circ l)_0 = l_0 = \phi^*$. On a

$$\begin{aligned}\rho(1 \otimes g_1) r(g_2) = \rho(1 \otimes g_1)\rho(1 \otimes g_2)(1) &= \rho\big(1 \otimes (g_1 *'^{\mathrm{opp}} g_2)\big)(1) \\ &= r(g_1 *'^{\mathrm{opp}} g_2) = r(g_2 *' g_1).\end{aligned}$$

d'où

$$g_2 *' g_1 = \big(r^{-1} \circ \rho(1 \otimes g_1) \circ r\big)(g_2)$$

En outre,

$$\begin{aligned}\big(r^{-1} \circ \rho(f \otimes 1) \circ r\big)(g) &= r^{-1}\big(\rho(f \otimes 1)\rho(1 \otimes g)(1)\big) = r^{-1}\big(\rho(f \otimes g)(1)\big) \\ &= r^{-1}\big(\rho(1 \otimes g)\rho(f \otimes 1)(1)\big) = \big(r^{-1} \circ \rho(1 \otimes g) \circ r\big)\big(r^{-1}(l(f))\big) \\ &= \Phi(f) *' g\end{aligned}$$

d'après l'équation précédente. Par conséquent

$$\begin{aligned}\Phi(f_1 * f_2) *' g &= \big(r^{-1} \circ \rho((f_1 * f_2) \otimes 1) \circ r\big)(g) \\ &= \big(r^{-1} \circ \rho(f_1 \otimes 1) \circ r\big)\left(\big(r^{-1} \circ \rho(f_2 \otimes 1) \circ r\big)(g)\right) \\ &= \Phi(f_1) *' \big(\Phi(f_2) *' g\big) = \big(\Phi(f_1) *' \Phi(f_2)\big) *' g\end{aligned}$$

ce qui montre que Φ est un homomorphisme de star-produits. □

2. Représentation de star-produits quand l'espace réduit existe

Voici un résultat positif simple:

Théorème X.2 (M.B. 2001) *Soit (M, ω) une variété symplectique munie d'un star-produit $*$. On note $[*]$ sa classe de Deligne. Soit $i : C \to M$ une sous-variété coïsotrope fermée de M telle que la variété symplectique réduite $\pi : C \to (M_{\mathrm{red}}, \omega_{\mathrm{red}})$ (voir théorème IX.1 en paragraphe IX C) existe. Supposons en outre qu'il existe une série formelle β à coefficients dans le deuxième groupe de cohomologie de de Rham de M_{red} telle que*

$$i^*[*] = \pi^*\beta.$$

Alors il existe une représentation de star-produits $\rho : (\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})[[\lambda]], *) \to \mathrm{Diffop(C)}[[\lambda]]$. En outre, il est toujours possible de choisir ρ, un star-produit $*_{\mathrm{red}}$ sur $(M_{\mathrm{red}}, \omega_{\mathrm{red}})$ de classe de Deligne $[*_{\mathrm{red}}] = \beta$ et une anti-représentation $\rho_{\mathrm{red}} : \mathcal{C}^\infty(M_{\mathrm{red}}, \mathbb{C})[[\lambda]], *_{\mathrm{red}}) \to \mathrm{Diffop(C)}[[\lambda]]$ ($\rho_{\mathrm{red}}(g_1 *_{\mathrm{red}} g_2) = \rho_{\mathrm{red}}(g_2)\rho_{\mathrm{red}}(g_1)$ quelles que soient $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^\infty(M_{\mathrm{red}}, \mathbb{C})[[\lambda]]$) de telle façon que

$$\rho(f)\rho_{\mathrm{red}}(g) = \rho_{\mathrm{red}}(g)\rho(f)$$

quelles que soient $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})[[\lambda]]$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(M_{\mathrm{red}}, \mathbb{C})[[\lambda]]$.

Démonstration: On considère la variété symplectique $(M \times M_{\mathrm{red}}, \omega_{(1)} - \omega_{\mathrm{red}(2)})$. Grâce au théorème de classification VI.5 des star-produits symplectiques il existe un star-produit $*_{\mathrm{red}}$ sur M_{red} tel que sa classe de Deligne $[*_{\mathrm{red}}]$ soit égale à β. On considère le star-produit $\hat{*} := * \otimes *_{\mathrm{red}}^{\mathrm{opp}}$, et sa classe de Deligne vaut

$$[\hat{*}] = pr_1^*[*] - pr_2^*[*_{\mathrm{red}}]$$

où $pr_1 : M \times M_{\mathrm{red}} \to M$ et $pr_2 : M \times M_{\mathrm{red}} \to M_{\mathrm{red}}$ désignent les projections canoniques. Grâce à l'équation $i^*\omega = \pi^*\omega_{\mathrm{red}}$ on voit que

$$j : C \to M \times M_{\mathrm{red}} : c \mapsto \big(i(c), \pi(c)\big)$$

est un plongement sur une variété lagrangienne $L := j(C)$ (voir eqn 9.11) de $M \times M_{\mathrm{red}}$. D'après un théorème de Weinstein (voir[79] ou[1], p.411, thm 5.3.18) il existe un voisinage ouvert $U \supset L$ dans $M \times M_{\mathrm{red}}$ un voisinage ouvert $L \subset V \subset T^*L$ de la section nulle du fibré cotangent de L et un difféomorphisme symplectique $\phi : U \to V$ dont la restriction à L donne l'identification usuelle de L avec la section nulle $L \to T^*L$. On peut choisir U de telle façon que $V \cap T_l L^*$ est contractile quel que soit $l \in L$. Soit $\tau : U \to C$ la submersion surjective induite par la projection du fibré $\tau_L^* : T^*L \to L$ moyennant ϕ (c.-à-d.: $\tau_L^* \circ \phi =: j \circ \tau$) et soient $i_L : L \to U$ et $i_U : U \to M$ les injections canoniques. U est une sous-variété ouverte, donc symplectique de $M \times M_{\rm red}$, et le star-produit $\hat{*}$ se restreint à U, $\hat{*}|_U$. L'application $(j \circ \tau)^* : \Gamma(\Lambda T^*L) \to \Gamma(\Lambda T^*U)$ induit un isomorphisme des cohomologies de de Rham (dont l'application réciproque est induite par $i_L^* : \Gamma(\Lambda T^*U) \to \Gamma(\Lambda T^*L)$) puisque $j \circ \tau$ est une rétraction par déformation de U sur L. Par conséquent, la classe de Deligne de $\hat{*}|_U$ vaut

$$\begin{aligned}[\hat{*}|_U] &= (j \circ \tau)^* i_L^* [\hat{*}|_U] = (j \circ \tau)^* i_L^* i_U^* [\hat{*}] = \tau^* j^* i_L^* pr_1^* [*] - \tau^* j^* i_L^* pr_2^* [*_{\rm red}] \\ &= \tau^* \big(i^*[*] - \pi^*[*_{\rm red}] \big) = 0\end{aligned}$$

puisque $i_U \circ i_L = i_L$, $pr_1 \circ i_L \circ j = pr_1 \circ j = i$ et $pr_2 \circ i_L \circ j = pr_2 \circ j = \pi$. Dans[15] on a montré qu'un star-produit sur $T^*L \cong T^*C$ dont la classe de Deligne s'annule est toujours équivalent au star-produit $*_s$ (voir eqn 8.11). Par conséquent, en utilisant le symplectomorphisme ϕ on peut montrer qu'il existe une série d'opérateur différentiels $S = id + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r S_r$ sur U telle que

$$S(F \hat{*}|_U G) = (SF) *_s (SG) \quad \text{quelles que soient } \mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{U}, \mathbb{C})[[\lambda]],$$

et il suit directement que la representation $\rho_s : \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})[[\lambda]] \to \mathrm{Diffop(C)}[[\lambda]]$ relative à une connection sans torsion ∇ sur $C \cong L$ (voir eqn 8.11) définit une représentation $\hat{\rho}$ pour l'algèbre $\big(\mathcal{C}^\infty(M \times M_{\rm red}, \mathbb{C})[[\lambda]], \hat{*}\big)$ par

$$\hat{\rho}(F) := \rho_s\big(S(F|_U)\big)$$

quelle que soit $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times M_{\rm red}, \mathbb{C})[[\lambda]]$. Evidemment, $\hat{\rho}_0 = j^*$. En particulier, quand on restreint la représentation $\hat{\rho}$ à la sous-algèbre $\big(\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})[[\lambda]], *\big)$ de $\big(\mathcal{C}^\infty(M \times M_{\rm red}, \mathbb{C})[[\lambda]], \hat{*}\big)$ (c.-à-d.: $\rho(f) := \hat{\rho}(pr_1^* f) = \hat{\rho}(f \otimes 1)$) on obtient la représentation ρ souhaitée. En plus, $\rho_0 = \hat{\rho}_0 \circ pr_1^* = j^* pr_1 * = i^*$. Quand on restreint la représentation $\hat{\rho}$ à la sous-algèbre $\big(\mathcal{C}^\infty(M_{\rm red}, \mathbb{C})[[\lambda]], *_{\rm red}^{\rm opp}\big)$ on obtient l'anti-représentation souhaitée par un raisonnement analogue. Puisque les deux sous-algèbres commutent, il en est de même pour ses représentations. □

Remerciments

Je voudrais remercier les organisateurs de l'école d'été de Safi, surtout Azzouz Awane, sa famille et ses étudiants pour l'acceuil chaleureux et l'organisation parfaite à Casablanca et à Safi.

XI. REFERENCES

[1] Abraham, R., Marsden, J. E.: *Foundations of Mechanics*, second edition. Addison Wesley Publishing Company, Inc., Reading Mass. 1985.

[2] Arnal, D., Cortet, J. C., Molin, P., Pinczon, G.:*Covariance and Geometrical Invariance in ∗-Quantization.* J. Math. Phys. **24**.2 (1983), 276–283.

[3] Arnal, D., Manchon, D., Masmoudi, M.: *Choix des signes pour la formalité de Kontsevitch.* Prépublication Universités de Metz et de Nancy, `math.QA/0003003`, 2000.

[4] Arnol'd, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Second Edition, Springer, New York, 1989.

[5] Batchelor, M.: *Two Approaches to Supermanifolds.* Trans. Am. Math. Soc. **258**(1) (1980), 257-270.

[6] Bates, S., Weinstein, A.: *Lectures on the Geometry on Quantization.* Berkeley Mathematics Lecture Notes, Volume 8, 1995.

[7] Bayen, F., Flato, M., Frønsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D.: *Deformation Theory and Quantization.* Annals of Physics **111** (1978), part I: 61-110, part II: 111-151.

[8] Berezin, F.: *Quantization.* Izv. Mat. NAUK **38** (1974), 1109-1165.

[9] Bertelson, M., Cahen, M., Gutt, S.: *Equivalence of Star-Products.* Class.Quant.Grav. **14** (1997), A93-A107.

[10] Bordemann, M.: *The deformation quantization of certain super-Poisson brackets and BRST cohomology.* Dans: Dito, G., Sternheimer, D.: *Conférence Moshé Flato 1999. Volume II.* Kluwer, Dordrecht, 2000, 45-68.

[11] Bordemann,M., Herbig, H.-C., Waldmann, S.: *BRST cohomology and Phase Space Reduction in Deformation Quantisation*, Commun.Math.Phys. **210** (2000), 107-144.

[12] Bordemann, M., Walter, M.: *Quantum Integrable Toda-Like Systems in Deformation Quantization.* Lett. Math. Phys. **48** (1999), 123-133.

[13] Bordemann, M., Neumaier, N., Waldmann, S.: *Homogeneous Fedosov Star Products on Cotangent Bundles II: GNS Representations, the WKB Expansion, traces, and applications*, J. Geom. Phys. **29** (1999), 199-234.

[14] Bordemann, M., Neumaier, N., Waldmann, S.: *Homogeneous Fedosov Star Products on Cotangent Bundles I: Weyl and Standard Ordering with Differential Operator Representation*, Comm. Math. Phys. **198** (1998), 363-396.

[15] Bordemann, M., Neumaier, N., Pflaum, M., Waldmann, S.: *On representations of star product algebras over cotangent spaces on Hermitean line bundles.* Preprint `math.QA`/9811055v2, December 1998.

[16] M. Bordemann, H. Römer, S. Waldmann: *A Remark on Formal KMS States in Deformation Quantization*, Lett. Math. Phys. **45** (1998), 49-61.

[17] M. Bordemann, S. Waldmann: *Formal GNS Construction and States in Deformation Quantization*, Comm. Math. Phys. **195** (1998), 549-583.

[18] Bordemann, M., Waldmann, S.: *A Fedosov Star-Product of Wick Type for Kähler Manifolds*, Lett. Math. Phys. **41** (1997), 243-253.

[19] M. Bordemann, M. Brischle, C. Emmrich, S. Waldmann: *Subalgebras with Converging Star Products in Deformation Quantization: An Algebraic Construction for* $\mathbb{C}P^n$, J. Math. Phys. **37** (1996), 6311-6323.

[20] M. Bordemann, M. Brischle, C. Emmrich, S. Waldmann: *Phase Space Reduction for Star Products: An Explicit Construction for* $\mathbb{C}P^n$, Lett. Math. Phys. **36** (1996), 357-371.

[21] Bordemann, M.: *On the deformation quantization of super-Poisson brackets.* preprint Uni Freiburg, FR-THEP-96/8, `q-alg`/9605038, May 1996.

[22] Cahen, M., DeWilde, M., Gutt, S.: *Local cohomology of the algebra of* $\mathcal{C}^\infty$*-functions on a connected manifold.* Lett. Math. Phys. **4** (1980), p.157-167.

[23] Cahen, M., Gutt, S.: *Regular* $*$*-representations of Lie Algebras.* Lett.Math.Phys. **6** (1983), 395-404.

[24] Cannas da Silva, A., Hartshorn, K., Weinstein, A.: *Lectures on Geometric Models for Noncommutative Algebras.* University of Berkeley, 1998.

[25] Cattaneo, A., Felder, G.: *A path integral approach to the Kontsevitch quantization formula.* Commun.Math.Phys. **212** (2000), 591-611.

[26] Cattaneo, A., Felder, G., Tomassini, L.: *From local to global defromation quantization of Poisson manifolds.* Prépublication `math.QA/0012228`, 2000.

[27] Connes, A.: *Noncommutative Differential Geometry.* Academic Press, San Diego, 1994.

[28] Connes, A., Flato, M., Sternheimer, D.: *Closed Star Products and Cyclic Cohomology.* Lett.Math.Phys. **24** (1992), 1-12.

[29] Deligne, P.: *Déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique: comparaison entre Fedosov et DeWilde, Lecomte.* Sel.Math., New series **1 (4)** (1995), 667-697.

[30] d'Espagnat, Bernard: *Le réel voilé.* Fayard, Paris, 1994.

[31] DeWilde, M., Lecomte, P.B.A.: *Star-products on cotangent bundles.* Lett. Math. Phys. **7** (1983), 235-241.

[32] DeWilde, M., Lecomte, P.B.A.: *Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie Algebra of arbitrary symplectic manifolds.* Lett. Math. Phys. **7** (1983), 487-49.

[33] DeWilde, M., Lecomte, P.B.A.: *Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of a Symplectic Manifold and Star Products. Existence, Equivalence, Derivations.* Dans: Hazewinkel, M., Gerstenhaber, M. (eds.) *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications.* Dordrecht, Kluwer, 1988.

[34] Dimakis, A., Müller-Hoissen, F.: *Stochastic differential calculus, the Moyal* $*$*-product, and noncommutative differential geometry.* Lett.Math.Phys. **28** (1993), p. 123-137.

[35] Dito, G., Sternheimer, D.: *Conférence Moshé Flato 1999. Volume I, II.* Kluwer, Dordrecht, 2000, 45-68.

[36] Drinfel'd, V.: On constant quasiclassical solutions of the Yang-Baxter Quantum Equation. Sov.Math.Doklady **28** (1983), 667-671.

[37] Dubois-Violette, M.: *Systèmes dynamiques contraints: l'approche homologique.* Ann. Inst. Fourier **37**, No.4, 45-57 (1987).

[38] Eckel, R.: *Eine geometrische Formulierung von Supermannigfaltigkeiten, deren Super-Poisson-Klammern und Sternprodukten.* Thèse de DEA de physique, en allemand, Fakultät für Physik, Université de Freiburg, R.F.A., avril 1996.

[39] Eckel, R.: *Quantisierung von Supermannigfaltigkeiten à la Fedosov.* Thèse de doctorat de physique, en allemand, Fakultät für Physik, Université de Freiburg, R.F.A., septembre 2000.

[40] Fedosov, B.: *Formal Quantization.* Some Topics of Modern Mathematics and Their Applications to Problems of Mathematical Physics, Moscow (1985), 129-136.

[41] Fedosov, B.: *A Simple Geometrical Construction of Deformation Quantization.* J. of Diff. Geom. **40** (1994), 213-238.

[42] Fedosov, B.: *Deformation Quantization and Index Theory.* Akademie Verlag, Berlin, 1996.

[43] Fish, J., Henneaux, M., Stasheff, J., Teitelboim, C.: *Existence, uniqueness and cohomology of the classical BRST charge with ghosts of ghosts.* Commun. Math. Phys. **120** (1989), 379–407.

[44] Gerstenhaber, M.: *The Cohomology Structure of an Associative Ring.* Ann. Math. **78** (1963), 267-288.

[45] Gerstenhaber, M.: *On the deformation of rings and algebras.* Ann.Maths **79** (1964), 59-103.

[46] Gerstenhaber, M.: *On the deformation of rings and algebras II.* Ann.Maths **84** (1966), 1-19.
[47] Gerstenhaber, M.: *On the deformation of rings and algebras III.* Ann.Maths **88** (1968), 1-34.
[48] Gerstenhaber, M.: *On the deformation of rings and algebras IV.* Ann.Maths **99** (1974), 257-276.
[49] El Gradechi, A.M., Nieto, L.M.: *Supercoherent states, super-Kähler geometry and geometric quantization.* Commun. Math. Phys. **175** (1996), 521-563.
[50] Gotay, M.: *On coisotropic imbeddings of presysmplectic manifolds.* Proc. Am. Math. Soc. **84** (1982), 111-114.
[51] Greub, W.: *Multilinear Algebra.* Springer, New York, 1978.
[52] Gutt, S.: *An explicit $*$-product on the cotangent bundle of a Lie group.* Lett.Math.Phys. **7** (1983), 249-258.
[53] Gutt, S., Rawnsley, J.: *Equivalence of star products on a symplectic manifold; an introduction to Deligne's Čech cohomology classes.* J.Geom.Phys. **29** (1999), 347-399.
[54] Henneaux, M., Teitelboim, C.: *Quantization of Gauge Systems.* Princeton University Press, New Jersey, 1992.
[55] Heß, H.: *Symplectic connections in geometric quantization and factor orderings.* Dissertation (Fachbereich Physik, Freie Universität Berlin, F.R.G., 1981).
[56] Hochschild, G., Kostant, B., Rosenberg, A.: *Differential forms on regular affine algebras.* Trans. Am. Math. Soc. **102** (1962), 383-408.
[57] Karabegov, A. V.: *Deformation quantization with separation of variables on a Kaehler manifold.* Commun. Math. Phys. **180** (1996), 745-755.
[58] Kobayashi S. & Nomizu K. Fondations of Differential Geometry, Vol I, Insterscience Publishers, Wiley and Sons, 1963.
[59] Kolář, I., Michor, P., Slovák, J.: *Natural Operations in Differential Geometry.* Springer, Berlin, 1993.
[60] Landsman, N.P., Pflaum, M., Schlichenmaier, M. (éditeurs): *Quantization of Singular Symplectic Quotients.* Birkhäuser, Basel, 2001.
[61] Marsden, J.E., Raţiu, T.: *Reduction of Poisson manifolds.* Lett.Math.Phys. **11** (1986), 161-169.
[62] Marsden, J.E., Weinstein, Alan: *Reduction of symplectic manifolds with symmetry.* Rep. on Math. Phys. **5** (1974), 121-130.
[63] Kontsevitch, M.: *Deformation Quantization of Poisson Manifolds. I.* Preprint `q-alg`/9709040, September 1997.
[64] Nadaud, F.: *On continuous and differential Hochschild cohomology.* Lett. Math. Phys. **47** (1999), 85-95.
[65] Neroslavski, O., Vlassov, A.T.: *Sur les déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique.* C.R.Acad.Sc. Paris I **292** (1981), 71-73.
[66] Nest, R., Tsygan, B.: *Algebraic Index Theorem.* Commun.Math.Phys. **172** (1995), 223-262.
[67] Nest, R., Tsygan, B.: *Algebraic Index Theorem for Families.* Adv.Math. **113** (1995), 151-205.
[68] Neumaier, N.: *Local ν-Euler Derivations and Deligne's Characteristic Class for Fedosov Star-Products and Star-Products of Special Type.* Prépublication Université de Freiburg, R.F.A., FR-THEP-99/3, juin 1999, `math.QA/9905176v2`.
[69] Omori, H., Maeda, Y., Yoshioka, A.: *Weyl manifolds and Deformation Quantization.* Adv.Math. **85** (1991), 224-255.
[70] Omori, H., Maeda, Y., Yoshioka, A.: *Existence of a Closed Star-Product.* Lett.Math.Phys. **26** (1992), 285-294.
[71] Pflaum, M.: *The normal symbol of Riemannian manifolds.* New York J. Math. **4** (1998), 97-125.
[72] Pflaum, M.: *On Continuous Hochschild Homology and Cohomology Groups.* Lett. Math. Phys. **44** (1998), 43-51.
[73] Rothstein, Mitchell.: *The structure of supersymplectic supermanifolds.* In: Bartocci, C. et al., Eds. *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, Proc. 19th Int. Conf., Rapallo/Italy 1990, Lect. Notes Phys. **375**, 331-343 (1991).
[74] Ruiz, J.M.: *The Basic Theory of Power Series.* Vieweg Verlag, Braunschweig, 1993.
[75] Sternheimer, D.: *Deformation Quantization: Twenty Years After.* Dans: Rembieliński, J. (éd.) *Particles, Fields, and Gravitation. (Łódź 1998).* AIP Press, New York, 1998, p. 107-145; voir aussi `math.QA/9809056`.
[76] Vaisman, I.: *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds.* Birkhäuser, Basel, 1994.
[77] Voronov, T.: *Quantization of Forms on the Cotangent Bundle.* Commun. Math. Phys. **205**, 315-336 (1999).
[78] Waldmann, S.: *Locality in GNS Representations of Deformation Quantization.* Commun.Math.Phys. **210** (2000), 467-495.
[79] Weinstein, A.: *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds.* Adv. Math. **6** (1971), 329-346.
[80] Weinstein, A.: *Coisotropic calculus and Poisson groupoids.* J.Math.Soc.Japan **40** (1988), 705-727.
[81] Weinstein, A.: *Deformation Quantization, Séminaire Bourbaki.* Vol. 1993/94. Astérisque **227** (1995), Exp. No. 789, 5, p. 389-409.
[82] Xu, P.: *Fedosov $*$-Products and Quantum Momentum Maps.* Commun. Math. Phys. **197** (1998), 167–197.