*African Journal Of Mathematical Physics Volume **2** Number **2** (2005)63-75*

Structures Symplectiques Généralisées

Azzouz Awane

Université HassanII- Mohammedia. Faculté des Sciences Ben M'sik.
B.P. 7955. Boulevard Driss Harti. Casablanca. Maroc.
a.awane@yahoo.fr

abstract

After reviewing one of the basic motivation that led to the generalized symplectic structure, namely the geometric interpretation of Numbu's Mechanics, we turn to study specific properties of this structure. In particular, we generalize the Darboux theorem and we give the relationships between Hamiltonian systems of the generalized symplectic mechanics and Numbu's dynamics.

Keywords : *Lagrangian spaces. Symplectic structure. Hamiltonian systems.. Poisson bracket.*
M.S.C. 20B25,20F28, 20F26, 51A10, 70Hxx.

I. INTRODUCTION

La mécanique de Namu est régie par les équations suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(y,z)} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(z,x)} \quad , \quad \frac{dz}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(x,y)}$$

où H et G sont deux fonctions réelles définies sur l'espace de phase M décrit par le système de coordonnées (x, y, z). La mécanique hamiltonienne classique est une géométrie de l'espace de phase (fibré tangent TM, d'une variété différentiable M, muni de la forme de Liouville λ); les équations de Hamilton

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v^i}, \quad \frac{dv^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$$

proviennent de la dualité $X \longmapsto i(X)\theta$, entre les fibrés des repères et des corepères[9], où $\theta = d\lambda$; ici l'application hamiltonienne H est à valeurs réelles et est liée au système hamiltonien X_H par la relation :

$$i\,(X_H)\,\theta = -dH.$$

On propose dans ce travail, une structure symplectique généralisée, ou structure $k-$symplectique, qui est un formalisme dans lequel cohabitent des $2-$formes différentielles fermées $\theta^1, \ldots, \theta^k$, de telle sorte que les applications hamiltoniennes H soient à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, et dont les composantes H^p soient liées au système hamiltonien X_H par les relations :

$$i\,(X_H)\,\theta^p = -dH^p,$$

afin de retrouver les équations de Nambu-Hamilton tout en conservant les traits spécifiques de la géométrie symplectique classique.
Rappelons le théorème de Darboux relatif aux structures symplectiques qui affirme que toute forme symplectique θ sur une variété symplectique de dimension $2n$ est isomorphe à la structure symplectique canonique de $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} dv^i \wedge dx^i,$$

où $(x^i, v^i)_{1\leq i\leq n}$ est le système de coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^{2n}$. Si (S) est un $2-$système de rang maximum dans $\mathbb{R}^3$, alors il est isomorphe à :

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^3; \end{cases}$$

un tel système sera appelé système extérieur $2-$symplectique, et à partir de la dimension 4, on a plusieurs $k-$systèmes non isomorphes de rang maximum; cependant, il existe un seul modèle de $k-$systèmes dans $\mathbb{R}^{n(k+1)}$, dit $k-$symplectique, subordonné à un sous espace vectoriel de codimension n, et qui correspond à une structure symplectique classique dotée d'un feuilletage lagrangien pour $k = 1$, cette dernière structure est usuellement appelée polarisation réelle au sens de Molino, Clark et Goel[12].

Le groupe de Heisenberg au sens de Goze-Haraguchi, met en relief les liens étroits entre la géométrie $k-$symplectique et celle définie par un $k-$système de contact, d'une manière analogue aux liens classiques existant entre les structures symplectiques et les structures de contact[3]. Notons enfin que la quantification géométrique de Kostant-Souriau est introduite dans ce cadre[15].

II. SYSTÈMES EXTÉRIEURS

Soit (S) un système différentiel extérieur sur $\mathbb{R}^n$ engendré par les équations

$$\begin{cases} \theta^1 = 0 \\ \dots \\ \theta^p = 0, \end{cases}$$

où les θ^i sont des formes différentielles fermées de degré 2 et linéairement indépendantes dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*$. Si $k = 1$, la classification des systèmes $(S) = \{\theta^1\}$ est entièrement déterminée par le rang de θ^1. On se propose d'étudier la classification de ces systèmes pour $k \geq 2$ en petite dimension.
Rappelons tout d'abord[6] que le rang de (S) coïncide avec la codimension de $A(S) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid i\,(X)\,\theta = 0 \text{ pour tout } \theta \in S\}$.

A. Classification pour $k = 2$ et $n = 3$

1. $rg(S) = 1$

Dans ces conditions $\dim(A(S)) = 2$. Notons par $\{e_1, e_2\}$ une base de $A(S)$ que l'on complète en une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Dans la base duale $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ de $\{e_1, e_2, e_3\}$, les formes θ^1 et θ^2 s'écrivent

$$\begin{cases} \theta^1 = \sum C^1_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \\ \theta^2 = \sum C^2_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \end{cases}$$

où C^l_{ij} sont des constantes réelles. On a $i(e_1)\theta^l = \sum_j C^l_{1j}\omega^j = 0$ et $i(e_2)\theta^l = \sum_j C^l_{2j}\omega^j = 0$ donc $C^l_{jk} = 0$ pour tous $l, j = 1, 2$. Ainsi θ^1 et θ^2 sont identiquement nulles, et donc $rg(S) = 0$, ce qui est absurde. Ceci montre qu'il n'existe pas de $2-$système de $2-$formes de rang 1.

2. $rg(S) = 2$

Dans ces conditions on a $\dim(A(S)) = 1$. Notons par $\{e_1\}$ une base de $A(S)$ que l'on complète en une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E. Dans la base duale $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ de $\{e_1, e_2, e_3\}$ les formes θ^1 et θ^2 s'écrivent

$$\begin{cases} \theta^1 = \sum C^1_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \\ \theta^2 = \sum C^2_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \end{cases}$$

On a $i(e_1)\theta^l = \sum_j C^l_{1j}\omega^j = 0$, donc $C^l_{1k} = 0$ pour tous $l, k = 1, 2$. D'où

$$\begin{cases} \theta^1 = C^1_{23}\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = C^2_{23}\omega^2 \wedge \omega^3 \end{cases}$$

et les formes θ^1 et θ^2 sont liées dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

3. $rg(S) = 3$

Dans ce cas le système (S) est non dégénéré (il est de rang maximal). Supposons $\theta^1 \neq 0$. On peut toujours trouver une base $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ de $\mathbb{R}^{3*}$ telle que $\theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^3$. Posons $\theta^2 = a\omega^1 \wedge \omega^3 + b\omega^2 \wedge \omega^3 + c\omega^1 \wedge \omega^2$. Le système $\{\theta^1, \theta^2 - a\theta^1\}$ étant algébriquement équivalent à (S), on peut supposer $a = 0$. L'hypothèse $rg(S) = 3$ implique que soit b soit c est non nul.
Supposons $b \neq 0$. Alors (S) est équivalent à $\left\{\theta^1, \frac{\theta^2}{b}\right\}$ ce qui permet de supposer $b = 1$. Ainsi $\theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^3 + c\omega^1 \wedge \omega^2$ et le changement de base $\alpha^i = \omega^i$, $i = 1, 2$ et $\alpha^3 = \omega^3 + c\omega^1$ donne le modèle suivant :

$$\begin{cases} \theta^1 = \alpha^1 \wedge \alpha^3 \\ \theta^2 = \alpha^2 \wedge \alpha^3 \end{cases}$$

Un tel système sera appelé système extérieur 2-symplectique, ou plus généralement système 2-symplectique. On en déduit la proposition suivante :

Proposition II.1 *Si* (S) *est un* $2-$*système de rang* 3 *dans* $\mathbb{R}^3$*, alors c'est un système extérieur* $2-$*symplectique.*

Dans ce cas le système (S) possède une solution maximale F de dimension 2 définie par $F = \ker \alpha^3$.

B. Classification pour $k = 3, n = 3$

Soit $(S) = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ un $3-$système (c'est-à-dire les trois formes θ^i sont supposées indépendantes dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$. Si le rang de (S) est 3, chacun des 2-systèmes $\{\theta^1, \theta^2\}, \{\theta^1, \theta^3\}, \{\theta^2, \theta^3\}$ est un système 2-symplectique. En effet, d'après ce que nous venons de voir, si ce n'était pas le cas, les formes $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ seraient liées. Comme $\{\theta^1, \theta^2\}$ est 2-symplectique, il existe une base $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ de $\mathbb{R}^{3*}$ telle que

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^3 \end{cases}$$

et

$$\theta^3 = a\omega^1 \wedge \omega^3 + b\omega^2 \wedge \omega^3 + c\omega^1 \wedge \omega^2.$$

Le système $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3 - a\theta^1 - b\theta^2\}$ est algébriquement équivalent à (S). On peut donc supposer que $\theta^3 = c\omega^1 \wedge \omega^2$. Par hypothèse $c \neq 0$, on peut choisir $c = 1$ et l'on obtient le modèle

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^3 \\ \theta^3 = \omega^1 \wedge \omega^2. \end{cases}$$

C. Classification pour $k = 3, n = 4, rg(S) = 4$.

1. Solutions maximales

Soit $(S) = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ un système extérieur de rang 4 dans $\mathbb{R}^4$, les formes extérieures θ^i sont de degré 2.

Proposition II.2 *Toute solution maximale est au plus de dimension 3.*

En effet, sinon le rang de (S) serait nul.

2. Systèmes munis d'une solution maximale de dimension 3

Soit H une solution maximale de (S) et $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de H. Complétons en une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ dont on note $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ la base duale. Comme H est solution du système, on doit avoir

$$\theta^i = \sum C^i_{j4} \omega^j \wedge \omega^4.$$

Le rang du système étant maximum, le rang de la matrice (C^i_{j4}) est de rang 3. On en déduit que le système est équivalent à

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^4 \\ \theta^3 = \omega^3 \wedge \omega^4. \end{cases}$$

Un tel système est un système $3-$symplectique dans $\mathbb{R}^4$.

3. Cas où la solution est de dimension 1

Supposons que chaque forme $\theta = \sum a_i \theta^i$ du système (S) soit de rang maximum. Dans ce cas toute solution du système est de dimension 1. Sinon l'existence d'une solution maximale de dimension 2 montre que l'idéal associé au système est de dimension 2. Il existe alors deux formes linéaires (ω^1, ω^2) telles que

$$\theta^i = \omega^1 \wedge \beta^i_1 + \omega^2 \wedge \beta^i_2.$$

Le système $(\beta^i_1, \beta^i_2)_{i=1,2,3}$ est au plus de rang 2. Il existe donc i tel que $\beta^i_1 = a\beta^j_1 + b\beta^k_1$, avec $i \neq j$ et $i \neq k$. La forme $\theta = \theta^i - a\theta^j - b\theta^k$ est au plus de rang 2 ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi toute solution est de dimension 1. Le problème de classification de tels systèmes consiste à classer un système de formes bilinéaires antisymétriques de rang 4, telles que toute combinaison soit aussi de rang 4 (ce problème est relié à la détermination du nombre de champs de vecteurs indépendants en tout point sur la sphère à trois dimension). Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^4 + \omega^2 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^3 \wedge \omega^1 \\ \theta^3 = \omega^3 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^2. \end{cases}$$

Remarque II.1 *Le système* $3-$*symplectique que nous venons de déterminer apparaît comme le système le plus "simple" de rang maximum. Tout autre système de cette nature peut être vu comme une déformation de celui-ci.*

III. STRUCTURES $K-$SYMPLECTIQUES LINÉAIRES

Un système $k-$symplectique (ou structure $k-$symplectique) sur un espace vectoriel E de dimension $n(k+1)$ sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 est défini la donnée d'un $(k+1)-$uple $(\theta^1, \cdots, \theta^k; F)$ dans lequel F est un sous-espace vectoriel de E de codimension n et $\theta^1, \ldots, \theta^k$ sont des formes bilinéaires alternées définissant un système non dégénéré et s'annulant sur F.
Comme exemple, citons la structure $k-$symplectique canonique de $E = \mathbb{K}^{n(k+1)}$; munissons l'espace E de sa base canonique $(e_i, e_{pi})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq p \leq k}$ dont on désigne par $(\omega^i, \omega^{pi})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq p \leq k}$ sa base duale. Les formes bilinéaires alternées

$$\theta^p = \sum_{j=1}^{n} \omega^{pj} \wedge \omega^j \;(p = 1, \cdots, k)$$

définissent une structure $k-$symplectique sur E subordonnées au sous espace F défini par les équations $\omega^1 = \ldots = \omega^n = 0$.
Le théorème de classification des structures $k-$symplectiques montre que la structure $k-$symplectique canonique de $\mathbb{K}^{n(k+1)}$ est l'unique modèle à isomorphisme près.

La base $(e_i, e_{pi})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq p \leq k}$ de E ayant pour base duale $(\omega^i, \omega^{pi})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq p \leq k}$ est appelée base $k-$symplectique de E.
Pour dégager un peu l'aspect symplectique résidant dans une structure $k-$symplectique, on considère les sous espaces caractéristiques suivants :

$$F^p = \bigcap_{q \neq p} A(\theta^q).$$

Dans les hypothèses et notations ci-dessus on a

1. $F = F^1 \oplus \ldots \oplus F^k$ (somme directe),
2. pour tout $p\,(p = 1, \ldots, k)$ l'application $i_p : x \longmapsto i(x)\theta^p$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de F^p sur l'annulateur $Ann(F)$ de F. Cet espace est isomorphe à $(E/F)^*$. Si $(e_i, e_{pi})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq p \leq k}$ est une base $k-$symplectique de E et $(\omega^i, \omega^{pi})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq p \leq k}$ sa base duale, alors $Ann(F)$ est engendré par $\omega^1, \ldots, \omega^n$, et F^p est engendré par les vecteurs $e_{p1}, \ldots, e_{pn}$.

Pour tout $p = 1, \ldots, k$, on pose

$$G^p = F^p \oplus \frac{E}{F}.$$

On a $\theta^p(x, y + f) = \theta^p(x, y)$, pour tous $x \in F^p$, $y \in E$ et $f \in F$, donc $\theta^p(x, y)$ ne dépend que de la classe $\overline{y}$ de y modulo F, ceci nous permet de poser

$$\overline{\theta}^p(x + \overline{y}, x' + \overline{y'}) = \theta^p(x, y') - \theta^p(x', y).$$

Ainsi, $\overline{\theta}^p$ définit bien une structure symplectique sur $G^p = F^p \oplus \frac{E}{F}$.
Les automorphismes d'un espace vectoriel $k-$symplectique E, qui conservent la structure $(\theta^1, \ldots, \theta^k; F)$, forment un groupe $\mathfrak{G}$. Les automorphismes qui laissent invariante chacune des formes θ^p est un sous-groupe noté $Sp(k, n; E)$ de G, appelé groupe $k-$symplectique de E. Comme tout élément de G s'écrit comme une composée d'éléments de $\mathfrak{Sp}(k, n; E)$ et de permutations, l'étude de $\mathfrak{G}$ se ramène à celle de $\mathfrak{Sp}(k, n; E)$.
On note par $\mathfrak{Sp}(k, n; \mathbb{K})$ le groupe des matrices des automorphismes $k-$symplectiques exprimées par rapport à la base $k-$symplectique. Le groupe $\mathfrak{Sp}(k, n; \mathbb{K})$ est formé des matrices du type

$$\begin{pmatrix} (T^{-1})^t & & 0 & 0 \\ S_1 & T & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ S_k & & & T \end{pmatrix}$$

où $T,\ S_1, \cdots,\ S_k$ sont des matrices $n{\times}n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, T inversible et $T\ (S_p)^t$ est une matrice symétrique pour tout $p\ (p\ =\ 1, \ldots,\ k)$.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathfrak{Sp}(k,n;E)$ est un groupe de Lie. L'algèbre de Lie de ce groupe sera notée $\mathfrak{sp}(k,n;E)$. L'algèbre de Lie $sp(k,n;\mathbb{K})$ du groupe de Lie $\mathfrak{Sp}(k,n;\mathbb{K})$ est l'algèbre de Lie des matrices des endomorphismes appartenant à $sp(k,n;E)$ relatives à la base $k-$symplectique. Les éléments de $\mathfrak{sp}(k,n;\mathbb{K})$ sont les matrices du type

$$\begin{pmatrix} -A^t & & 0 & 0 \\ S_1 & A & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ S_k & & & A \end{pmatrix}$$

où $A,\ S_1, \cdots,\ S_k$ sont des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que les matrices S_p sont symétriques pour tout $p\ (p\ =\ 1, \ldots,\ k)$ ([1] et[2]).
Dans les hypothèses et notations ci-dessus, on considère l'espace $G^p\ =\ F^p \oplus \frac{E}{F}$. muni de la structure symplectique $\overline{\theta}^p(x+\overline{y}, x'+\overline{y'}) = \theta^p(x,y') - \theta^p(x',y)$, pour tous $x+\overline{y}, x'+\overline{y'} \in G^p$, où $p = 1, \ldots, k$. Pour tout $f \in\ Sp(k,n;E)$, la correspondance

$$\overline{f}_p : x+\overline{y} \longmapsto f(x) + \overline{f(y)}$$

définit un élément du groupe symplectique $\mathfrak{Sp}(\overline{\theta}^p, G^p)$ de l'espace vectoriel symplectique $(G^p, \overline{\theta}^p)$.

Par rapport à une structure $k-$symplectique $(\theta^1, \cdots, \theta^k; F)$, on introduit et on étudie d'une manière naturelle les notions d'orthogonalité $k-$symplectique, qui n'est rien d'autre que l'orthogonalité par rapport à chacune des formes θ^p, l'existence des sous espaces totalement isotrope, de sous-espaces lagrangiens, et des endomorphismes adjoints.

Dans une structure $k-$symplectique, si L est un sous-espace totalement isotrope alors $\dim L\ \leq\ nk$, et si L est lagrangien alors $n\ \leq\ \dim L\ \leq\ nk$, pour $k\ =\ 1$, on retrouve le cas classique où tous les sous-espaces lagrangiens sont de dimension n.
A tout endomorphisme u de E, est associé une application linéaire de $Hom(E,\mathbb{K}^k)$ dans lui même, notée ${}^tu$ et appelée transposée de u, définie par ${}^tu(\xi) = \xi \circ u$, pour tout $\xi \in Hom(E,\mathbb{K}^k)$, et l'existence d'un endomorphisme adjoint, c'est à dire d'un endomorphisme u^* de E tel que $\theta^p(t,u(x)) = \theta^p(u^*(t),x))$, quels que soient $p(p = 1,\ldots,k)$ et $t,x \in E$ est équivalente à :

$$Im\,{}^tu \circ \tilde{\eta} \subseteq Im\tilde{\eta}$$

où $\tilde{\eta}$ est l'application de E dans le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $Hom(E,\mathbb{K}^k)$ définie par $\tilde{\eta}(x)(y)\ =\ (\theta^1(x,y),\ldots,\theta^k(x,y))$, pour tous $x,y\ \in\ E$.
L'étude des symétries d'une structure donnée (c'est à dire, les applications qui conservent cette structure) permet une étude fine de la géométrie sous jacente.
Chacune des monographies de E.Artin[?] et de J.Dieudonné[?] met en évidence le rôle central joué par les dilatations et les transvections dans l'étude de la génération des groupes classiques. Ces transformations engendrent le groupe linéaire dès que le corps de base $\mathbb{K}$ est différent de $\mathbb{F}_2$ (corps fini à deux éléments). Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_2$, alors le groupe linéaire $Gl_{\mathbb{K}}(E)$ coïncide avec le groupe spécial linéaire $SL_{\mathbb{K}}(E)$. Quant au groupe symplectique $\mathfrak{Sp}(\theta,E)$, relatif à une structure symplectique θ donnée sur E, il est engendré par l'ensemble de ses transvections symplectiques.
Conformément à l'étude classique correspondant au cas symplectique, nous étudions les transvections k-symplectiques, c'est à dire, celles qui conservent un système extérieur $k-$symplectique $(\theta^1,\ldots,\theta^k;F)$ sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, il se trouve que, contrairement au cas classique d'une structure symplectique, les transvections $k-$symplectiques n'engendrent pas le groupe $\mathfrak{Sp}(k,n;\mathbb{K})$; mais elles engendrent le sous-groupe normal $\mathfrak{Tp}(k,n;\mathbb{K})$, qui est le sous-groupe de $\mathfrak{Sp}(k,n;\mathbb{K})$ formé des matrices du type :

$$\begin{pmatrix} I_n & & 0 & 0 \\ S_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & I_n & 0 \\ S_k & & & I_n \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

où I_n est la matrice unité d'ordre n et $S_1, \cdots, S_k$ des matrices $n \times n$ symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$. En particulier $\mathfrak{Tp}(k,n;\mathbb{K})$ est un sous-groupe abélien normal dans $\mathfrak{Sp}(k,n;\mathbb{K})$.
Cette propriété s'explique aisément pour $k = 1$. Le groupe $1-$symplectique $\mathfrak{Sp}(1,n;E)$ ne coïncide pas avec $\mathfrak{Sp}(n,E)$. En fait $\mathfrak{Sp}(1,n,E)$ est le sous-groupe de $\mathfrak{Sp}(n,E)$ formé des éléments qui laissent invariant la structure symplectique θ sur E et qui laisse aussi invariant un sous-espace lagrangien L. Les transvections de $\mathfrak{Sp}(1,n,E)$ sont donc les transvections de $\mathfrak{Sp}(n,E)$ qui laissent invariant ce sous espace lagrangien. Il est étonnant de voir que le sous groupe $\mathfrak{Tp}(1,n,E)$ engendré par ces transvections apparaît aussi naturellement dans le cadre de la quantification géométrique de Kostant-Souriau et également dans l'approche que fait Kirillov pour l'analyse harmonique dans les groupes de Lie nilpotents.
Dans le cas où $\mathbb{K}$ est le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes, le groupe des transformations affines $X \longmapsto AX + B$ de $\mathbb{K}^{n(k+1)}$ où A est dans $\mathfrak{Tp}(k,n;\mathbb{K})$ est un groupe de Lie noté $\mathfrak{Hp}(k,n;\mathbb{K})$, qui estnilpotent connexe et simplement connexe dont le groupe dérivé coïncide avec le centre.

IV. VARIÉTÉS $K-$SYMPLECTIQUES

L'un des problèmes majeurs de la géométrie différentielle concerne la détermination et la classification des variétés différentiables munies d'une structure géométrique donnée. Ces derniers temps, de nombreux travaux se consacraient à l'étude des variétés feuilletées, que nous pouvons voir dans ce contexte comme des variétés différentiables munies d'un système de Pfaff intégrables. L'étude des variétés de contact et symplectiques connaît en ce moment un développement intéressant. Ces variétés sont définies par l'existence soit d'un système de Pfaff de rang 1 de classe maximum, soit d'une $2-$formes extérieures fermées de rang maximum.
Des considérations liées à la mécanique statistique et l'originalité d'une étude portant sur les systèmes de formes extérieures nous ont guidées vers une recherche de variétés dont la géométrie est définie localement par des systèmes $k-$symplectiques. Bien entendu, les systèmes extérieurs $k-$symplectiques sont des modèles de systèmes extérieurs de rang maximum. Une étude générale des systèmes extérieurs passe, dans cette optique, par celle des systèmes k-symplectiques.
Ceci étant, *un système différentiel extérieur $k-$symplectique* (où *structure k-symplectique*), est défini par la donnée sur une variété différentiable M de dimension $n(k+1)$, d'un $(k+1)$-uple $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$ dans lequel E est un sous fibré intégrable de TM de codimension n et $\theta^1, \ldots, \theta^k$ sont des $2-$formes différentielles fermées formant un système non dégénéré qui s'annulent sur les sections de E.
L'exemple fondamental d'une structure $k-$symplectique sur la somme de Whitney $\pi : M = T^*B \oplus \ldots \oplus T^*B \longrightarrow B$ au dessus de B. Pour tout $p(p = 1, \ldots, k)$, on pose

$$\lambda_u^p(X_u) = \omega^1_{\pi(u)}(\pi^T(X_u)$$

pour tous $x \in B$, $u = \left(\omega_x^1, \ldots, \omega_x^k\right)$ et $X_u \in T_u M$.
On ainsi k formes de Pfaff telles que $d\lambda^1, \ldots, d\lambda^k$ fermées de degré 2 et s'annulant sur les champs tangents au feuilletage défini par cette fibration; pour $k = 1$; la forme de Pfaff $\lambda = \lambda^1$ n'est autre que la forme de Liouville du fibré cotangent. Le $(k+1)-$uple $(d\lambda^1, \ldots, d\lambda^k, E)$ définit une structure $k-$symplectique sur cette somme de Whitney, cette structure s'étend au produit fibré de fibrations lagrangiennes.

Théorème IV.1 *(Théorème de Darboux) Toute structure $k-$symplectique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$ est localement isomorphe à la structure $k-$symplectique canonique de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$, c'est à dire, tout point de M possède un voisinage ouvert U muni d'un système de coordonnées locales $(x^i, v^{pi})_{1\leq i\leq n, 1\leq p\leq k}$ dites adaptées, tel que les formes différentielles θ^p soient représentées dans U par*

$$\theta^p = \sum_{i=1}^{n} dv^{pi} \wedge dx^i$$

et le sous-fibré E soit défini par les équations $dx^1 = \ldots = dx^n = 0$.

Ceci est équivalent à dire qu'il existe un atlas $\mathfrak{A}$ de M , appelé atlas de Darboux, tel que les changements de cartes soient dans le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ laissant invariante la structure k-symplectique canonique de cet espace.

V. VARIÉTÉS À STRUCTURES PRESQUE K-SYMPLECTIQUES

Soit M une variété différentiable de dimension $n(k+1)$. On dit que M possède une structure presque k-symplectique si pour tout point x de M l'espace tangent T_xM admet une structure k-symplectique d'espaces vectoriels

$$(\theta_x^1, \dots, \theta_x^k; F_x)$$

où $\theta^p \in \Lambda^2(M)$.
Bien entendu, on suppose que cette structure dépend de façon C^∞ du point x. Ceci revient à dire que pour tout x_0 de M, il existe un voisinage U_0 de x_0 dans M et une section locale C^∞ du fibré des corepères notée $(\omega^i, \omega^{pi})_{1\leq i\leq n, 1\leq p\leq k}$ telle qu'en chaque point x de U_0 les $2-$formes θ^α s'écrivent

$$\theta^p = \sum_{i=1}^{n} \omega^{pi} \wedge \omega^i$$

et le sous-espace F soit défini par les équations $\omega^1 = \dots = \omega^n = 0$. Une telle section locale du fibré des corepères de M sera dite adaptée à la structure presque k-symplectique de M.
On dit qu'une connexion linéaire Π sur une variété presque $k-$symplectique est adaptée à la structure presque $k-$symplectique si la $1-$forme de connexion (Π_v^u) prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie $k-$symplectique $sp(k,n;\mathbb{R})$ lorsqu'elle est exprimée par rapport à une section adaptée.
Autrement dit, les composantes de la connexion notées par rapport à la section adaptée

$$(\Pi_j^s, \Pi_j^{ps}, \Pi_{pj}^s, \Pi_{qj}^{ps})$$

satisfont à

$$\Pi_{pj}^s = 0 \quad , \quad \Pi_{qj}^{ps} = 0 \ si \ p \neq q$$

$$\Pi_{qj}^{ps} + \Pi_s^j = 0, \quad , \quad \Pi_j^{ps} - \Pi_s^{qj} = 0.$$

Rappelons que la torsion d'une connexion linéaire Π est une forme vectorielle T dont les composantes T^u sont liées à celles de la forme de connexion (Π_f^u) et de la forme fondamentale ω^u du fibré tangent par la relation

$$T^u = d\omega^u + \sum_f \Pi_f^u \wedge \omega^f.$$

Se donner une presque structure k-symplectique sur la variété M équivaut à se donner une $G-$structure avec $G = \mathfrak{Sp}(k,n;\mathbb{R})$. Dire que cette $G-$structure est intégrable revient à dire que la presque structure $k-$symplectique correspond à une structure $k-$symplectique. Nous pouvons donc nous ramener au calcul du tenseur de Bernard pour intégrer cette $G-$structure. Mais la nullité de ce tenseur est équivalente à l'existence d'une connexion adaptée sans torsion. Nous allons donc étudier le problème d'existence d'une telle connexion. Notons que si l'intégrabilité d'une $G-$structure implique la nullité du tenseur de Bernard, la réciproque n'est en général pas vérifiée. La proposition suivante précise que dans le cas des structures presque $k-$symplectiques, il y a équivalence entre la nullité de ce tenseur (ou l'existence d'une connexion adaptée sans torsion) et l'intégrabilité.
La structure presque k-symplectique est intégrable si et seulement si on peut trouver au voisinage de chaque point x_0 de M des coordonnées locales $(x^i, v^{pi})_{1\leq i\leq n, 1\leq p\leq k}$ telles que les 2-formes θ^p s'écrivent

$$\theta^p = \sum_{i=1}^{n} dv^{pi} \wedge dx^i$$

et le sous-fibré F défini par les équations

$$dx^1 = \dots = dx^n = 0.$$

Proposition V.1 *Soit M une variété munie d'une structure presque k-symplectique avec F intégrable. Alors la structure presque k-symplectique est intégrable si et seulement si la variété M possède une connexion adaptée à torsion nulle.*

Remarque V.1 *Une $\mathfrak{Sp}(k,n;\mathbb{R})$-structure intégrable est du type infini car l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(k,n;\mathbb{R})$ possède des éléments de rang 1.*

VI. CHAMPS HAMILTONIENS

Un système hamiltonien X sur M est un automorphisme infinitésimal pour la structure $k-$symplectique. À un tel système est associé localement, au voisinage de chaque point, une application différentiable H à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ dont les composantes H^p vérifient $i(X)\theta^p = -dH^p$.
Soit $H = (H^p)_{1\leq p\leq k}$ une application hamiltonienne et X_H le système hamiltonien associé. Dans un ouvert U de M muni d'un système de coordonnées locales adaptées $(x^i, v^{pi})_{1\leq i\leq n, 1\leq p\leq k}$, les composantes H^p s'écrivent :

$$H^p = \sum_{j=1}^{n} A_j(x^1, \dots, x^n)v^{pj} + B^p(x^1, \dots, x^n).$$

où A_j et B^p sont des fonctions différentiables basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}_{|U}$ dans U .
Étant donné deux applications hamiltoniennes H , K, le crochet $[X_H, Y_K]$ est un système hamiltonien. Plus précisément, l'application notée $\{H, K\}$ de M dans $\mathbb{R}^k$ définie par $\{H, K\} = -(\theta^1(X_H, X_K), \dots, \theta^k(X_H, X_K))$ satisfait $[X_H, X_K] = X_{\{H,K\}}$.
Dans un système de coordonnées locales adaptées $(x^i, v^{pi})_{1\leq i\leq n, 1\leq p\leq k}$, les composantes $\{H, K\}^p$ de $\{H, K\}$ s'écrivent :

$$\{H, K\}^p = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial H^p}{\partial x^s}\frac{\partial K^p}{\partial v^{ps}} - \frac{\partial H^p}{\partial v^{ps}}\frac{\partial K^p}{\partial x^s} \right).$$

L'ensemble $\mathfrak{H}(M)$ des applications hamiltoniennes de la structure $k-$symplectique muni de $(H, K) \longmapsto \{H, K\}$,est une algèbre de Lie réelle de dimension infinie.

A. Liens avec la mécanique statistique de Nambu

Le théorème de Liouville sur la conservation des volumes est le point central de la mécanique classique. Ce théorème joue un rôle important dans la mécanique statistique. Le formalisme "hamiltonien" classique n'est pas le seul décrivant cette mécanique statistique. Tout système d'équations qui conduit au théorème de Liouville convient également. Nambu propose une généralisation possible de la dynamique hamiltonienne pour un espace de phase de dimension 3. Nous allons voir, après avoir rappelé le système d'équations de Nambu, que les applications hamiltoniennes de la structure $2-$symplectique sur $\mathbb{R}^3$ engendrent les solutions de ce système.
Les équations régissant le mouvement de la mécanique statistique de Nambu sont données par le système suivant :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(y,z)} \ , \ \frac{dy}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(z,x)} \ , \ \frac{dz}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(x,y)}$$

où H et G sont deux fonctions réelles définies sur l'espace de phase M décrit par le système de coordonnées (x, y, z) et où $\frac{D(H,G)}{D(y,z)}$ désigne le Jacobien

$$\frac{D(H,G)}{D(y,z)} = \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial y}.$$

Les équations ci-dessus sont appelées équations de mouvement de Nambu et le champ de vecteurs dont les trajectoires sont définies par les équations de mouvement de Nambu sera désigné par $X^n_{(H,G)}$, et appelé système dynamique de Nambu.
Munissons l'espace M de la structure $2-$symplectique canonique $(\theta^1, \theta^2; E)$ définie par :

$$\begin{cases} \theta^1 = dx \wedge dz \\ \theta^2 = dy \wedge dz \end{cases}$$

et $E = \ker dz$. Les applications hamiltoniennes de la structure $2-$symplectique sont les applications du type

$$H : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dont les composantes sont données par

$$H^1 \;=\; f(z)x + g^1(z),\;\; H^2 \;=\; f(z)y + g^2(z),$$

où f, g^1 et g^2 sont des fonctions différentiables basiques définies sur l'espace M. Les trajectoires du système hamiltonien X_H de la structure 2-symplectique sont données par les équations suivantes :

$$\frac{dx}{dt} \;=\; -\frac{\partial H^1}{\partial z}\;,\; \frac{dy}{dt} \;=\; -\frac{\partial H^2}{\partial z}\;,\; \frac{dz}{dt} \;=\; \frac{\partial H^1}{\partial x} \;=\; \frac{\partial H^2}{\partial y}$$

Théorème VI.1 *Soient $H = (H^1, H^2)$ avec $H^1 = f(z)x + g^1(z)$ et $H^2 = f(z)y + g^2(z)$), une application hamiltonienne de la structure $2-$symplectique. Alors le système hamiltonien X_H et le système dynamique de Nambu X_H^n sont liés par la relation*

$$X_H^n \;=\; f(z)X_H.$$

Cela résulte directement des relations suivantes:

$$\frac{D(H^1,H^2)}{D(y,z)} \;=\; -f(z)\frac{\partial H^1}{\partial z}\;,\; \frac{D(H^1,H^2)}{D(z,x)} \;=\; -f(z)\frac{\partial H^2}{\partial z}\;,$$

et

$$\frac{D(H^1,H^2)}{D(x,y)} \;=\; -f(z)\frac{\partial H^1}{\partial x} \;=\; -f(z)\frac{\partial H^2}{\partial y}.$$

Corollaire VI.1 *La fonction*

$$(f(z))^{-1}H = (x + h^1(z), y + h^1(z))$$

est une solution des équations du mouvement de la mécanique statistique de Nambu sur le domaine de l'espace où $f(z)$ ne s'annule pas, ici

$$h^1(z) = (f(z))^{-1}g^1(z) \qquad et \qquad h^2(z) = (f(z))^{-1}g^2(z)\,.$$

Dans le cas où M est l'espace réel $\mathbb{R}^{k+1}$, on considère la structure $k-$symplectique canonique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$ définie par

$$\begin{cases} \theta^1 \;=\; dv^1 \wedge dx, \\ \qquad \ldots \\ \theta^2 \;=\; dv^k \wedge dx. \end{cases}$$

et E est défini par l'équation $dx = 0$, où $\left(x, v^1, \ldots, v^k\right)$ est le système de coordonnées cartésienne de $\mathbb{R}^{k+1}$.

Les applications hamiltoniennes de cette structure $k-$symplectique sont les applications $H : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$dont les composantes sont données par :

$$\{H^1 \;=\; f(x)v^1 + g^1(x), \ldots, H^k \;=\; f(x)v^k + g^2(x),$$

où f, $g^1, \ldots, g^2$ sont des fonctions basiques différentiables sur l'espace M.

Les trajectoires du système dynamique de Nambu X_H^n associé à H sont données par les équations suivantes :

$$\frac{dx^j}{dt} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k\;=1}^{k+1} \varepsilon_{ji_1 i_2\ldots i_k}\frac{\partial H^1}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial H^2}{\partial x^{i_2}}\cdots\frac{\partial H^k}{\partial x^{i_k}},$$

où $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}}$ est le tenseur de Levi-Civita.

On a donc,

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_{(k+1)123\ldots k}\frac{\partial H^1}{\partial v^1}\frac{\partial H^2}{\partial v^2}\cdots\frac{\partial H^k}{\partial v^k} = (-1)^k\,(f(x))^k \ .$$

$$\frac{dv^1}{dt} = \varepsilon_{1(k+1)2\ldots k}\frac{\partial H^1}{\partial x}\frac{\partial H^2}{\partial v^2}\cdots\frac{\partial H^k}{\partial v^k} = (-1)^{k-1}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}v^1 + \frac{\partial g^1(x)}{\partial x}\right)(f(x))^{k-1},$$

$$\frac{dv^2}{dt} = \varepsilon_{21(k+1)2\ldots k}\frac{\partial H^1}{\partial v^1}\frac{\partial H^2}{\partial x}\frac{\partial H^3}{\partial v^3}\cdots\frac{\partial H^k}{\partial v^k} = (-1)^{k-1}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}v^2 + \frac{\partial g^2(x)}{\partial x}\right)(f(x))^{k-1},$$

$$\cdots$$

$$\frac{dv^k}{dt} = \varepsilon_{k123\ldots(k+1)}\frac{\partial H^1}{\partial v^1}\frac{\partial H^2}{\partial v^2}\cdots\frac{\partial H^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\frac{\partial H^k}{\partial x} = (-1)^{k-1}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}v^k + \frac{\partial g^k(x)}{\partial x}\right)(f(x))^{k-1},$$

Les trajectoires du système hamiltonien X_H, sont données par :

$$\begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} & = f(x) \\ \frac{dv^1}{dt} & = -\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}v^1 + \frac{\partial g^1(x)}{\partial x}\right) \\ \frac{dv^2}{dt} & = -\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}v^2 + \frac{\partial g^2(x)}{\partial x}\right) \\ \cdots & \quad\cdots \\ \frac{dv^k}{dt} & = -\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}v^k + \frac{\partial g^k(x)}{\partial x}\right) \end{array}$$

On déduit la :

Proposition VI.1 *Soient $H = (H^1, \ldots, H^k)$ avec $H^p = f(x)x^p + g^p(x)$, $p = 1, \ldots, k$, une application hamiltonienne de la structure $k-$symplectique canonique de $\mathbb{R}^{k+1}$. Alors le système hamiltonien X_H et le système dynamique de Nambu X_H^n sont liés par la relation*

$$X_H^n = (-1)^k\,(f(x))^{k-1}\,X_H.$$

Corollaire VI.2 *La fonction*

$$(-1)^k\,(f(x))^{-(k-1)}H = (x^1 + h^1(x), \ldots, x^k + h^k(x))$$

est une solution des équations du mouvement de la mécanique statistique de Nambu sur le domaine de l'espace où $f(x)$ ne s'annule pas, ici

$$h^p(x) = (-1)^k\,(f(x))^{-(k-1)}g^p(x) \ \textit{avec}\ p = 1, \ldots, k.$$

B. Propriétés affines des variétés $k-$symplectiques

Soit M est une variété différentiable de dimension $n(k+1)$ munie d'une structure k-symplectique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$. Soient TM/E le fibré quotient de TM par E, Notons ν la projection canonique $TM \longrightarrow TM/E = \nu E$ et soit ν^*E le fibré dual de νE. Le sous fibré E étant par définition intégrable, il définit un feuilletage sur M que l'on désignera par $\mathfrak{F}$. D'après le théorème de Darboux, il existe pour chaque point x de M un voisinage U et un système de coordonnées locales $(x^i, v^{pi})_{1\leq i\leq n, 1\leq p\leq k}$ définies sur U, dites adaptées, telles que

$$\theta^p_{|U} = \sum_{i=1}^{n} dv^{pi}\wedge dx^i \quad , \quad E_{|U} = \ker dx^1 \cap \ldots \cap \ker dx^n$$

pour tout $p(p = 1, \dots, k)$.

Ceci est équivalent à dire qu'il existe un atlas $\mathfrak{A}$ de M , appelé atlas de Darboux, tel que les changements de cartes soient dans le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ laissant invariante la structure k-symplectique canonique de cet espace. Il résulte des expressions canoniques de Darboux que les formes différentielles $\theta^p \, (p = 1, \dots, k)$ sont de classe $2n$. La distribution $x \longmapsto C_x(\theta^p)$, où $C_x(\theta^p)$ est l'espace caractéristique au point x de la $2-$forme θ^p, définit un sous-fibré intégrable de TM .

Pour tout $p \, (p = 1, \dots, k)$ on pose

$$E^p = \bigcap_{q \neq p} C(\theta^q).$$

En termes des coordonnées locales adaptées $(x^i, v^{pi})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq p \leq k}$, on a

1. νE est engendré par les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$,
2. $\nu * E$ est engendré par les formes différentielles $dx^1, \dots, dx^n$,
3. E^p est engendré par les dérivations $\frac{\partial}{\partial v^{p1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^{pn}}$.

Par conséquent, pour tout $p \, (p = 1, \dots, k)$, le sous-fibré E^p est intégrable, et l'application $X \longmapsto i(X)\theta^p$ définit un isomorphisme i_p de fibrés vectoriels au dessus de M de E^p sur $\nu^* E$.

Les feuilletages $\mathfrak{F}^p$ $(p = 1, \dots, k)$ de M définis par les sous-fibrés intégrables E^p sont appelés feuilletages caractéristiques de la structure k-symplectique.

En termes de coordonnés locales adaptées $(x^i, v^{pi})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq p \leq k}$ l'application i_p exprime la dualité $\frac{\partial}{\partial v^{pi}} \longmapsto dx^i$ entre la géométrie le long des feuilles $\mathfrak{F}^p$ et la géométrie transverse.

Les changements de cartes locales s'expriment par

$$\bar{v}^{pi} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} v^{pj} + \varphi^{pi}(x^1, \dots, x^n) \quad , \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n) .$$

Ainsi, ces expressions sont affines par rapport aux coordonnées v^{pi}, donc toute feuille de $\mathfrak{F}^p (p = 1, \dots, k)$ et de $\mathfrak{F}$ est munie d'une structure affine. Chose qu'on peut démontrer en utilisant la connexion de Bott-Weinstein. L'essentiel est que ceci m'a conduit à introduire une nouvelle notion de connexion, dite connexion en drapeaux, généralisant la connexion de Bott-Weinstein, qui nous permet de montrer que les feuilles du feuilletage $\mathfrak{F}$ et des feuilletages caractéristiques sont affines, et de démontrer, en utilisant le théorème de R.Blumenthal que :

1. si M est compacte alors le groupe fondamental $\pi_1(M)$ de M est infini,
2. si $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$ alors le feuilletage $\mathfrak{F}$ est défini par une n-forme fermée sans singularité sur M, $n = codim(\mathcal{F})$.

Notons enfin, que si X est un système hamiltonien, alors son flot respecte la structure affine des feuilles de $\mathfrak{F}$. i.e. X est une transformation affine infinitésimale de l'espace M muni de sa structure de variété différentiable de dimension nk définie par les feuilles de $\mathfrak{F}$.

C. Variétés k-symplectiques affines

Une variété M de dimension $n(k+1)$ munie d'une structure k-symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$. est dite $k-$symplectique affine si l'atlas de Darboux associé à la structure $k-$symplectique définit sur M une structure de variété affine.

Soit $\mathfrak{Gp}(k, n; \mathbb{R})$ le groupe des transformations affines de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ laissant invariante la structure k-symplectique canonique de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$. Le groupe $\mathfrak{Gp}(k, n; \mathbb{R})$ est l'ensemble des transformations affines $X \longmapsto AX + B$ de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ telles que $A \in \mathfrak{Sp}(k, n; \mathbb{R})$.

Soit M une variété $k-$symplectique connexe affine complète de dimension $n(k+1)$. Alors M est un quotient $M = \mathbb{R}^{n(k+1)}/\Gamma$ de groupe fondamental Γ , où Γ est un sous groupe de $\mathfrak{Gp}(k, n; \mathbb{R})$ qui opère de manière proprement discontinue sans point fixe sur $\mathbb{R}^{n(k+1)}$:

$$M = \mathbb{R}^{n(k+1)}/\Gamma \quad , \quad \pi_1(M) = \Gamma.$$

Rappelons qu'une variété affine est complète si les géodésiques de la connexion plate sont définies sur $\mathbb{R}$.

Soit $\mathfrak{H}\mathfrak{p}(k,n;\mathbb{R})$ le groupe affine k-symplectique

$$\begin{pmatrix} I_n & & 0 & 0 & T_1 \\ S_1 & I_n & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & T_k \\ S_k & 0 & 0 & I_n & Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où I_n est la matrice unité d'ordre n, $S_1, \cdots, S_k$ sont des matrices réelles symétriques du type $n \times n$ et $T_1, \ldots, T_k, Q$ sont des vecteurs colonnes de rang n. On désigne par (S, Q, T) les matrices de cette forme où $S = (S_1, \ldots, S_k)$, $T = (T_1, \ldots, T_k)$.

Soit M une variété k-symplectique connexe localement affine complète de dimension $k+1$. Alors $M = \mathbb{R}^{k+1}/\Gamma$ ayant pour groupe fondamental Γ, où Γ est un sous groupe de $\mathfrak{H}\mathfrak{p}(k,1;\mathbb{R})$ agissant de façon proprement discontinue sans point fixe sur $\mathbb{R}^{k+1}$:

$$M = \mathbb{R}^{k+1}/\Gamma \quad , \quad \pi_1(M) = \Gamma .$$

Cas particulier $n = 1$ *et* $k = 2$*.*
Soit Γ_2^{02012} le sous groupe de $Hp(2,1,\mathbb{Z})$ engendré par

$$(S^0, 0, T^0) \quad , \quad (mS^0, 0, T^1) \quad , \quad (S^2, q_2, T^2)$$

où S^0, S^2, T^0, T^1, $T^2 \in \mathbb{Z}^2$, $q_2 \in \mathbb{Z}^*$, $m \in \mathbb{Q}$ avec $q_2 \neq 0$, $\det(T^0, T^1) \neq 0$ et $\delta = mD_2$ ici δ et D_2 désignent les déterminants $\det(T^1, S^0)$ et $\det(T^0, S^0)$ respectivement. Alors on a :

1. Le sous groupe Γ_2^{02012} opère proprement discontinu sans points fixes sur $\mathbb{R}^3$.
2. Le quotient $M = \mathbb{R}^3/\Gamma_2^{02012}$ est une variété $2-$symplectique compacte connexe affine orientable et complète.
3. La variété $M = \mathbb{R}^3/\Gamma_2^{02012}$ est homéomorphe au tore $\mathbb{T}^3$ si et seulement si $S^0 = 0$

VII. REFERENCES

[1] A.Awane *Sur une généralisation des structures symplectiques.* Thèse Strasbourg (1984).
[2] A.Awane *k-symplectic structures.* Journal of Mathematical physics 33(1992) 4046-4052. U.S.A.
[3] A.Awane *G-espaces k-symplectiques homogènes.* Journal of Geometry and Physics. 13(1994) 139-157. North-Holland.
[4] A.Awane *Structures k-symplectiques.* Thèse Mulhouse(1992).
[5] A.Awane *Some affine properties of the k-symplectic manifolds.* "Contribution to Algebra and Geometry *Beiträge zur Algebra und Geometrie*". Volume 39 (1998), No. 1, 75-83.
[6] A.Awane, M.Goze, *Pfaffian systems, k-symplectic systems.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/boston/London 2000.
[7] P. Dazrod *Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages lagrangiens.* Ann. Ecole Normale Sup. 14 Paris (1981) 465-480.
[8] J. Dieudonne, *Eléments d'Analyse.* Gauthiers-Villars (1974).
[9] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et Mécanique Analytique.* Hermann. Paris (1969).
[10] M. Goze, Y. Haraguchi, *Sur les r-systèmes de contact.* CRAS, Paris, (1982), T294 SI 95-97.
[11] P. Libermann, C.M.Marle *Géométrie symplectique Bases théorique de la Mécanique classique.* Tomes 1, 2, 3, U.E.R. de Mathématiques, L.A. 212 et E.R.A. 944, 1020, 1021 du C.N.R.S.
[12] P.Molino, *Géométrie de Polarisation.* Travaux en cours Hermann (1984) 37-53.
[13] P.Molino *Géométrie globale des feuilletages riemanniens.* Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser.A, 1,85(1982) 45-76.
[14] Y.Nambu*Generalized Hamiltonian Dynamics.* Physical Review D Volume 7, Number 8 15 April 1973.
[15] M. Puta *Some Remarks on the k-symplectic manifolds.* Tensors.109-115.