African Journal Of Mathematical Physics Volume **2** *Number* **2** *(2005)119-130*

Intégrabilité basique des systèmes hamiltoniens

A.Awane, S.Fikri

Université HassanII-Mohammedia. Faculté des Sciences Ben M'sik.
B.P. 7955. Boulevard Driss Harti. Casablanca. Maroc.
a.awane@yahoo.fr,

abstract

We study the basic integrability of Hamiltonian systems on polarized manifold and in generalized case of $k-$*symplectic manifold in analogy and in continuation to works accomplished in classical symplectic geometry.*
Keywords *: Lagrangian spaces. Symplectic structure. Hamiltonian systems. Poisson bracket.*
M.S.C. 20F05, 20F26, 51A10, 70Hxx.

I. INTRODUCTION

Une variété polarisée est défini par la donnée sur une variété différentiable M de dimension paire $2n$ d'un couple (θ, E) dans lequel θ est une forme différentielle fermée de degré 2 de rang maximum et E est on sous fibré intégrale de TM de codimension n tel que la $2-$forme θ s'annule sur les sections de E; en d'autres termes, θ est une structure symplectique sur M et le feuilletage $\mathfrak{F}$ défini par le sous fibré E est lagrangien par rapport à θ. La notion de variété polarisée joue un rôle important en théorie de la quantification géométrique de Kostant-Souriau. Des propriétés intéressantes ont été mises en évidence par A.Weinstein, P.Dazord, J.M. Morvan, P. Molino, P.Libermann etc...

Un système hamiltonien est dit complètement intégrable s'il possède n intégrales premières $f_1, \dots, f_n$ indépendantes en tout point ($df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0$) en involution (les crochets de Poisson $\{f_i, f_j\}$ sont nuls). L'étude locale des systèmes de Pfaff et la modélisation par Nambu de la mécanique statistique nous ont conduit à introduire la notion de structure $k-$symplectique ([1,7]).

Le groupe de Heisenberg au sens de Goze-Haraguchi[3] ,[11] met en relief les liens étroits entre la géométrie $k-$symplectique et celle définie par un $k-$système de contact par analogie avec les liens classiques qui existent entre les structures symplectiques et les structures de contact. Notons que la quantification géométrique de Kostant-Souriau est introduite dans le cadre de ces structures[16].

Le cas particulier $k = 1$ correspond à une polarisation réelle au sens de Molino, Clark et Goel. L'extension aux $k-$systèmes est fortement motivée par ses liens avec la mécanique statistique de NAMBU.

Après avoir étudié quelques propriétés des systèmes hamiltoniens d'une structure $k-$symplectique, ce qui complète des résultats exposés dans des articles antérieurs[2] et[5], nous verrons que l'existence d'intégrales premières d'un système hamiltonien, sur une variété polarisée puis sur une variété $k-$symplectique en général, facilite la recherche des courbes intégrales de ce système. Ici on étudie le cas particulier important où l'existence d'intégrales premières basiques pour le feuilletage, en nombre suffisant permet la détermination des courbes intégrales par quadratures et éliminations.

Sauf mention du contraire, les variétés différentiables considérées ici sont supposées connexes, séparées, paracompactes à bases dénombrables d'ouverts, et tous les éléments introduits dans ce travail sont supposés de classe C^∞.

II. SYSTÈMES HAMILTONIENS POLARISÉS

Soit M une variété différentiable de dimension $p+q$ munie d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension q et soit E le sous fibré intégrable $p-$dimensionnel de TM correspondant à E. Le sous-fibré de TM défini par les vecteurs tangents aux feuilles de $\mathfrak{F}$ sera désigné par E, l'ensemble des sections du $M-$fibré $TM \longrightarrow M$ (resp. $E \longrightarrow M$) sera désigné par $\mathfrak{X}(M)$ (resp. $\Gamma(E)$) et l'ensemble des $r-$formes différentielles sur M sera désigné par $\mathfrak{A}^r(M)$.

Une fonctions réelle f de classe C^∞ sur M est dite basique pour $\mathfrak{F}$ si, pour tout $Y \in \Gamma(E)$, la dérivée $Y(f)$ de f suivant Y est identiquement nulle. L'ensemble des fonctions basiques pour $\mathfrak{F}$ sera désigné par $\mathfrak{A}^0_b(M,\mathfrak{F})$. Il est clair que $\mathfrak{A}^0_b(M,\mathfrak{F})$ est un sous anneau de $\mathfrak{A}^0(M)$ des fonctions réelles différentiables. Rappelons ([14]) qu'une fonction différentiable $f \in \mathfrak{A}^0(M)$ est basique si et seulement si f est constante sur chaque feuille de $\mathfrak{F}$.

Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est dit feuilleté (ou est appelé un automorphisme infinitésimal pour $\mathfrak{F}$) si pour tout $Y \in \Gamma(E)$ le crochet de Lie $[X,Y]$ appartient à $\Gamma(E)$. Rappelons ([14]) que pour qu'un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ soit feuilleté, il est nécessaire et suffisant que si $(\varphi_t)_{|t|<\varepsilon}$ est un groupe local à un paramètre associé à X sur un voisinage d'un point arbitraire de M, le difféomorphisme local φ_t laisse invariant le sous fibré E, quel que soit t.

On désigne par $\mathfrak{L}(M,\mathfrak{F})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs feuilletés pour $\mathfrak{F}$. Notons que si $f \in \mathfrak{A}^0_b(M,\mathfrak{F})$ et $X \in \mathfrak{L}(M,\mathfrak{F})$, la fonction $X(f)$ est basique ($X(f) \in \mathfrak{A}^0_b(M,\mathfrak{F})$) et le champ de vecteurs fX est un automorphisme infinitésimal pour $\mathfrak{F}$ ($fX \in \mathfrak{L}(M,\mathfrak{F})$).

Soit M une variété différentiable de dimension paire $2n$, munie d'une polarisation réelle (θ,E). Le théorème de Darboux montre que tout point de M possède un voisinage ouvert muni d'un système de coordonnées locales $\left(x^i,v^i\right)_{1\leq i\leq n}$,dites adaptées, telles que

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} dv^i \wedge dx^i$$

et le sous fibré E soit défini par les équations $dx^1 = \ldots = dx^n = 0$.
Dans ces coordonnées, les différentielles $dx^1,\ldots,dx^n$ engendrent le dual Q^* du fibré transverse au feuilletage et les dérivations $\frac{\partial}{\partial v^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v^n}$ engendrent le sous fibré E tangent au aux feuilles. La correspondence $dx^i \longmapsto \frac{\partial}{\partial v^i}$ traduit la dualité symplectique entre la géométrie transverse au feuilletage et la géométrie le long des feuilles.
Un système hamiltonien de la structure symplectique θ est dit polarisé, s'il est en plus feuilleté pour le sous fibré E, autrement dit, si X est une transformation infinitésimale pour la structure symplectique θ et pour le sous fibré E à la fois, on dira que le champ de vecteurs X est un système hamiltonien pour la polarisation (θ,E). Dans un système de coordonnées locales adaptées $\left(x^i,v^i\right)_{1\leq i\leq n}$ le champ de vecteurs X s'écrit :

$$X = -\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_j}{\partial x^s}(x^1,\ldots,x^n)v^s \;+\; \frac{\partial b}{\partial x^s}(x^1,\ldots,x^n)\right)\frac{\partial}{\partial v^s} + \sum_{s=1}^{n}\; a_s(x^1,\ldots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^s}$$

où $a_1,\ldots,a_n,b$ sont des fonctions basiques.
On a :

1. Pour toute fonction différentiable f on a l'équivalence :

   f est basique pour $\mathfrak{F}$ si et seulement si, le système hamiltonien (de la structure symplectique θ) associé X_f sont des sections du sous fibré E.

2. Pour toutes fonctions f, g basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$, le crochet de Lie $[X_f, X_g]$ est identiquement nul.

Un système hamiltonien polarisé est dit basiquement intégrable s'il possède n intégrales premières basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$ et qui sont indépendantes en tout point de M.
Soient $f^1, \ldots, f^n$ des fonctions basiques pour la polarisation (θ, E) indépendantes en tout point de M. Alors ces fonctions sont en involution, et par conséquent?−?, pour chaque point x_0 de M, il existe un voisinage ouvert U de x_0, n fonctions $g^1, \ldots, g^n$, différentiables sur U, telles que $(f^i, g^i)_{1 \leq i \leq n}$ soit un système de coordonnées locales adaptées dans lesquelles on a :

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} dg^i \wedge df^i$$

et comme les fonctions $f^1, \ldots, f^n$ sont basiques pour le feuilletage, on déduit que le sous fibré E soit défini par les équations $df^1 = \ldots = df^n = 0$.
L'expression locale d'un système hamiltonien polarisé, que tout système hamiltonien basiquement intégrable est une section du sous fibré E.

Soit $\mathfrak{h}_E$ le faisceau des germes des systèmes hamiltoniens locaux et basiquement intégrables et soient X, Y deux sections locales de $\mathfrak{h}_E$ dans un ouvert U, on a $L_X\theta = 0$ et $i\,(Y)\,\theta$ est fermée, donc

$$i\,([X, Y])\,\theta = [L_X, i\,(Y)]\,\theta = L_X i\,(Y)\,\theta = d\,(\theta\,(Y, X)) = 0,$$

car X, Y sont des sections de E, par suite $[X, Y] = 0$, ce qui montre le faisceau $\mathfrak{h}_E$ est abélien. Ceci étant, soit M une variété différentielle de dimension paire $2n$ munie d'une polarisation réelle $(\theta, \mathfrak{F})$ et soit x un système hamiltonien polarisé basiquement intégrable dont on note par $f^1, \ldots, f^n$ les intégrales premières basiques de X. On sait qu'il existe n fonctions $g^1, \ldots, g^n$, différentiables sur un ouvert U, telles que $(f^i, g^i)_{1 \leq i \leq n}$ soit un système de coordonnées locales tel que $\theta = \sum\limits_{i=1}^{n} dg^i \wedge df^i$ et le sous fibré E soit défini par les équations $df^1 = \ldots = df^n = 0$.
Dans ce système, le système hamiltonien polarisé X s'écrit :

$$X = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial b}{\partial f^s}(f^1, \ldots, f^n)\frac{\partial}{\partial g^s}.$$

où b est une fonction basique.

Proposition II.1 *Un système hamiltonien basiquement intégrable est une combinaison linéaire sur M des champs de vecteurs X_{f^i} dont les coefficients sont constants sur chaque trajectoire de X.*

Démonstration. Puisque le champ de vecteurs X est polarisé, il est alors tangent aux feuilles de $\mathfrak{F}$, et comme $i\,(X)\,\theta$ est fermée, pour tout point $x_0 \in M$, il existe d'après le lemme de Poincaré, un voisinage ouvert U de x_0 et une fonction $H : U \longrightarrow \mathbb{R}$, différentiable sur U telle que $i\,(X)\,\theta = -dH$, la fonction H est basique par conséquent. Les égalités

$$i\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial f^i} X_{f^i}\right)\theta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial f^i} i\left(X_{f^i}\right)\theta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial f^i} df^i = -dH = i\,(X)\,\theta,$$

d'où

$$X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial f^i}\left(f^1, \ldots, f^n\right) X_{f^i}$$

sur l'ouvert U, les coefficients $\frac{\partial H}{\partial f^i}\left(f^1, \ldots, f^n\right)$ sont constants sur les trajectoires de X, car $f^1, \ldots, f^n$ sont des intégrales premières de X.
Comme les trajectoires de X sont connexes, le champ de vecteurs X_H est une combinaison linéaire sur M des X_{f^s}, dont les coefficients sont constants sur chaque trajectoire du système hamiltonien X.

Proposition II.2 *Soit X un système hamiltonien supposé basiquement intégrable. Alors pour tout point a de M, la courbe intégrale de X passant par ce point peut être localement déterminée, au voisinage de a par quadratures.*

Démonstration. Soit $a \in M$. Il existe un voisinage ouvert U de a dans M, des fonctions $\left(g^i\right)_{1\leq i\leq n}$ différentiables sur U telles que $\left(f^i, g^i\right)_{1\leq i\leq n}$ définit un système de coordonnées locales adapté à la polarisation $(\theta, \mathfrak{F})$, c'est à dire :

$$\theta_{|U} = \sum_{i=1}^{n} dg^i \wedge df^i \text{ et } E_{|U} = \bigcap_{i=1}^{n} \ker df^i.$$

L'équation différentielle définie par X s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{df^i}{dt} = 0 \\ \frac{dg^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial f^i} = -\frac{\partial b}{\partial f^i}(f^1, \ldots, f^n), \end{cases}$$

par suite la courbe intégrale de X passant par a, pour la valeur 0 du paramètre t, s'exprime au moyen des coordonnés locales $\left(f^i, g^i\right)_{1\leq i\leq n}$ par :

$$\begin{cases} f^i\left(t\right) = f^i\left(a\right) \\ g^i\left(t\right) = g^i\left(a\right) - t\frac{\partial b}{\partial f^i}\left(f^1\left(a\right), \ldots, f^n\left(a\right)\right). \end{cases}$$

La détermination de cette courbe intégrale ne fait intervenir que des quadratures, des éliminations et des dérivations partielles.

III. SYSTÈMES HAMILTONIENS $K-$SYMPLECTIQUE

Considérons maintenant une variété différentiable M de dimension $n(k+1)$ munie d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension n et soient $\theta^1, \ldots, \theta^k$ des formes différentielles sur M, supposées fermées de degré 2. Pour tout x de M, on désignera par $C_x(\theta^1), \ldots, C_x(\theta^k)$ les espaces caractéristiques des $2-$formes $\theta^1, \ldots, \theta^k$ au point x[10].
On suppose que $\left(\theta^1, \ldots, \theta^k; E\right)$ définit une structure $k-$symplectique sur M, c'est à dire, pour tout $x \in M$, les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $C_x(\theta^1) \cap \cdots \cap C_x(\theta^k) = \{0\}$,
2. $\theta^p(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(E)$ et $p(p = 1, \ldots, k)$.

Rappelons ([2,7]) que si $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$ est une structure $k-$symplectique sur M, alors pour tout point p de M, il existe un voisinage ouvert U de M contenant p de coordonnées locales $(x^i, v^{pi})_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$, dites adaptées, tel que les formes différentielles θ^p soient représentées dans U par :

$$\theta^p_{|U} = \sum_{i=1}^{n} dv^{pi} \wedge dx^i$$

et le sous-fibré E soit défini par les équations $dx^1 = \ldots = dx^n = 0$.
Ceci est équivalent à dire, qu'il existe un atlas $\mathfrak{A}$ de M, appelé atlas de Darboux, dont les changements de cartes appartiennent au pseudogroupe des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ laissant la structure $k-$symplectique canonique de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ invariante. Rappelons que la structure $k-$symplectique canonique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$ de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ est définie par les $2-$formes $\theta^p = \sum_{i=1}^{n} dv^{pi} \wedge dx^i$ et par le sous-fibré E de $T\mathbb{R}^{n(k+1)}$ défini par les équations $dx^1 = \ldots = dx^n = 0$, ici $(x^i, v^{pi})_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ est le système de coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$.
Il résulte des expressions canoniques de Darboux ci-dessus que les formes différentielles θ^p sont de classe

$2n$; ceci entraîne que la distribution $x \longmapsto C_x(\theta^p)$ définit un sous-fibré intégrable de TM. Pour tout $p\,(p = 1, \ldots, k)$, on pose

$$E^p = \bigcap_{q \neq p} C(\theta^q).$$

Soient TM/E le fibré quotient et ν la projection canonique $TM \longrightarrow TM/E = \nu E$. Soit $\nu^* E$ le dual de νE. On désigne par $\mathfrak{F}$ le feuilletage défini par le sous fibré E.

En termes de coordonnées locales adaptées $(x^i, v^{pi})_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$, on a :

1. νE est engendré par les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$,
2. $\nu^* E$ est engendré par les formes différentielles $dx^1, \ldots, dx^n$,
3. E^p est engendré par les dérivations $\frac{\partial}{\partial v^{p1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v^{pn}}$.

Rappelons ([5]) que l'on a :

1. pour chaque $p(p = 1, \ldots, k)$, le sous fibré E^p est intégrable,
2. $E = E^1 \oplus \ldots \oplus E^k$ (somme directe),
3. pour tout $p(p = 1, \ldots, k)$, l'application $X \longmapsto i(X)\theta^p$ définit un isomorphisme i_p de fibrés vectoriels au dessus de M de E^p sur $\nu^* E$.

Les feuilletages $\mathfrak{F}^p$ de M définis par les sous-fibrés E^p sont appelés *feuilletages caractéristiques* de la structure $k-$symplectique. En termes de coordonnées locales adaptées $(x^i, v^{pi})_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$, les applications i_p expriment la dualité :

$$\frac{\partial}{\partial v^{ps}} \longmapsto dx^s$$

entre la géométrie le long des feuilles de $\mathfrak{F}^p$ et la géométrie transverse.

Proposition III.1 *Pour toute fonction basique f sur $(M, \mathfrak{F})$, on peut associer k champs de vecteurs $X^1_f, \ldots, X^k_f$ satisfaisant à :*

1. *X^p_f est tangent aux feuilles des feuilletages caractéristiques $\mathfrak{F}^p$ pour tout p,*
2. *$\left[X^p_f, X^q_f\right] = 0$.*

Soit j l'application de $\mathfrak{X}(M)$ dans $\mathfrak{A}^1(M) \times \ldots \times \mathfrak{A}^1(M)$ donnée par $j(X) = (i(X)\theta^1, \ldots, i(X)\theta^k)$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$.
Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est appelé *système hamiltonien $k-$symplectique* si X est un automorphisme infinitésimal pour $\mathfrak{F}$ et pour les $2-$formes θ^p à la fois; autrement dit X satisfait les conditions suivantes :

1. X est un automorphisme infinitésimal pour $\mathfrak{F}$
2. les formes de Pfaff $i(X)\theta^1, \ldots, i(X)\theta^k$ sont fermées.

On dira tout simplement que X est un tout simplement *système hamiltonien.*
Le champ de vecteurs X sera appelé automorphisme infinitésimal pour la structure $k-$symplectique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$.
Soit X un système hamiltonien. Il résulte du lemme de Poincaré, que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de M contenant x et une application différentiable H de U dans $\mathbb{R}^k$ vérifiant sur U la relation $j(X) = -dH$.
Inversement, si H est une application différentiable de M dans $\mathbb{R}^k$ telle que $dH \in j(\mathfrak{L}(M, \mathfrak{F}))$, alors il existe un unique champ de vecteurs sur M, noté X_H, et appelé système hamiltonien associé à H, tel que $j(X_H) = -\,dH$.

Les applications différentiables H de M dans $\mathbb{R}^k$ telles que $dH \in j(\mathfrak{L}(M,\mathfrak{F}))$ sont appelées applications hamiltoniennes de la structure $k-$symplectique $(\theta^1,\ldots,\theta^k;E)$.
Rappelons ([2] et[7]) que si $H = (H^p)_{1\leq p\leq k}$ est une application hamiltonienne et X_H le système hamiltonien associé. Dans un ouvert U de M muni d'un système de coordonnées locales adaptées $(x^i, v^{pi})_{1\leq p\leq k,1\leq i\leq n}$, les composantes H^p de H et X_H s'écrivent respectivement :

$$H^p = \sum_{j=1}^{n} a_j(x^1,\ldots,x^n)v^{pj} + b^p(x^1,\ldots,x^n)$$

et

$$X_H = -\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_j}{\partial x^s}(x^1,\ldots,x^n)v^{ps} + \frac{\partial b^p}{\partial x^s}(x^1,\ldots,x^n)\right)\frac{\partial}{\partial v^{ps}} + \sum_{s=1}^{n} a_s(x^1,\ldots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^s}$$

où a_j et b^p sont des fonctions différentiables dans U basiques pour $\mathfrak{F}_U$.
Soient H, K deux applications hamiltoniennes et X_H, X_K les systèmes hamiltoniens associés. Le crochet $[X_H, Y_K]$ est un système hamiltonien, et plus précisément, l'application notée $\{H,K\}$, de M dans $\mathbb{R}^k$, donnée par

$$\{H,K\} = -(\theta^1(X_H,X_K),\ldots,\theta^k(X_H,X_K))$$

satisfait à $[X_H,X_K] = X_{\{H,K\}}$.
Dans un système de coordonnées locales adaptées $(x^{pi},x^i)_{1\leq p\leq k,1\leq i\leq n}$ les composantes $\{H,K\}^p$ de $\{H,K\}$ s'écrivent :

$$\{H,K\}^p = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H^p}{\partial x^s}\frac{\partial K^p}{\partial v^{ps}} - \frac{\partial H^p}{\partial v^{ps}}\frac{\partial K^p}{\partial x^s}\right).$$

Soit $\mathfrak{H}(M)$ l'ensemble des applications hamiltoniennes de la structure $k-$symplectique $(\theta^1,\ldots,\theta^k;E)$. La correspondance $(H,K)\longmapsto\{H,K\}$ de $\mathfrak{H}(M)\times\mathfrak{H}(M)$ dans $\mathfrak{H}(M)$ est une application $\mathbb{R}-$bilinéaire antisymétrique satisfaisant l'identité de Jacobi et on voit bien que $(\mathfrak{H}(M),\{,\})$ est une algèbre de Lie réelle de dimension infinie.

IV. INTÉGRABILITÉ

Soient M une variété différentiable de dimension $n(k+1)$, munie d'une structure $k-$symplectique $(\theta^1,\ldots,\theta^k;E)$.
Un champ de vecteurs X sur M est dit basiquement intégrable par rapport à la structure $k-$symplectique, s'il possède n intégrales premières basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$, définies sur toute la variété M et indépendantes en tout point de M.
Par exemple, considérons l'espace $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ muni de la structure $k-$symplectique canonique $\left(\theta^1,\ldots,\theta^k,E\right)$. Le système hamiltonien associé à l'application hamiltonienne

$$H = -\left(x^j\delta^{1p},\ldots,x^j\delta^{qp},\ldots,x^j\delta^{kp}\right)$$

est donné par :

$$X_H = \frac{\partial}{\partial v^{pj}},$$

avec $p = 1,\ldots,k$ et $j = 1,\ldots,n$. Pour tout $i = 1,\ldots,n$, les fonctions $f_i = x^i \quad (i = 1,\ldots,n)$ sont des intégrales premières basiques de X_H pour le feuilletage $\mathfrak{F}$ indépendantes en tout point de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ donc ce champ de vecteurs est basiquement intégrable.

Proposition IV.1 *Soient $f^1,\dots,f^n$ des fonctions basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$, indépendantes en chaque point de M. Alors, pour tout $x_o \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_o, nk fonctions différentiables $\left(f^{pi}\right)_{1\le p\le k,1\le i\le n}$ sur U telles que $\left(f^i,f^{pi}\right)_{1\le p\le k,1\le i\le n}$ soit un système de coordonnées locales adapté à la structure $k-$symplectique, c'est à dire :*

$$\begin{cases} \theta^p_{|U} = \sum\limits_{i=1}^{n} df^{pi}\wedge df^i \\ E_{|U} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker df^i. \end{cases}$$

Démonstration. Il résulte du théorème de Darboux ([1],[2] ou[7]) que pour tout point $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert V de M contenant x_0 de coordonnées locales $\left(x^i,v^{pi}\right)_{1\le p\le k,1\le i\le n}$, dites adaptées, tel que les formes différentielles θ^p soient représentées dans V par $\theta^p_{|V} = \sum\limits_{i=1}^{n} dv^{pi}\wedge dx^i$ et que le sous-fibré E soit défini par les équations $dx^1 = \dots = dx^n = 0$. Puisque $f^1,\dots,f^n$ sont des fonctions basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$, indépendantes en chaque point de M, alors $(f^i,v^{pi})_{1\le p\le k,1\le i\le n}$ est un système de coordonnées locales adaptées au feuilletage, c'est-à-dire que les dérivations

$$\left(\frac{\partial}{\partial v^{pi}}\right)_{1\le p\le k,1\le i\le n}$$

engendrent l'espace tangent aux feuilles de $\mathfrak{F}$, et E est défini par les équations $df^1 = \dots = df^n = 0$. En remplaçant $x^1,\dots,x^n$ par $f^1,\dots,f^n$ dans la démonstration du théorème de Darboux, on voit qu'il existe un voisinage ouvert U de x_o, nk fonctions différentiables $\left(f^{pi}\right)_{1\le p\le k,1\le i\le n}$ sur U telles que $\left(f^i,f^{pi}\right)_{1\le p\le k,1\le i\le n}$ soit un système de coordonnées locales adaptées à la structure $k-$symplectique, c'est à dire, $\theta^p_{|U} = \sum\limits_{i=1}^{n} df^{pi}\wedge df^i$ et $E_{|U} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker df^i$,ce qui montre la proposition.
Soient X un système hamiltonien basiquement intégrable et $f^1,\dots,f^n$ des intégrales premières de X, basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$ indépendantes en tout point de M. La relation $X_x(f^p) = df^p_x(X_x) = 0$, pour tout $x\in M$ et pour tout $p = 1,\dots,k$, montre que $X_x \in \ker df^1_x \cap \dots \cap \ker df^n_x$, et X est une section du sous fibré E, d'où :

Corollaire IV.1 *Soient X un système hamiltonien basiquement intégrable, alors X est tangent aux feuilles.*

Corollaire IV.2 *Soit $H = (H^p)_{1\le p\le k}$ une application hamiltonienne et X_H le système hamiltonien associé supposé basiquement intégrable. Dans un ouvert U de M muni d'un système de coordonnées locales adaptées $\left(x^i,v^{pi}\right)_{1\le p\le k,1\le i\le n}$, les composantes H^p de H et X_H s'écrivent :*

$$H^p \;=\; b^p(x^1,\dots,x^n)$$

$$X_H \;= -\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} \frac{\partial b^p}{\partial x^s}(x^1,\dots,x^n)\frac{\partial}{\partial v^{ps}} \;=\; -\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} \frac{\partial H^p}{\partial x^s}(x^1,\dots,x^n)\frac{\partial}{\partial v^{ps}}$$

où les $b^1,\dots b^k$ sont des fonctions différentiables dans U, basiques pour le feuilletage.

Proposition IV.2 *Soit $H = (H^p)_{1\le p\le k}$ une application hamiltonienne sur M et X_H le système hamiltonien associé. On suppose que X_H est basiquement intégrable. Alors X_H est une combinaison linéaire sur M des champs de vecteurs $X^p_{f^i}$ $(1\le p\le k, 1\le i\le n)$, dont les coefficients sont constants sur chaque trajectoire de X_H.*

Démonstration. Il résulte du corollaire précédent que tout point de M possède un ouvert sur lequel les fonctions H^p $(p = 1,\dots,k)$ s'écrivent sous la forme :

$$H^p = \widetilde{H}^p \circ \left(f^1,\dots,f^n\right),$$

où $\widetilde{H}^p$ est une fonction différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Comme

$$i\left(\sum_{i,p}\frac{\partial\widetilde{H}^p}{\partial f^i}\left(f^1,\ldots,f^n\right).X^p_{f^i}\right)\theta^q=\sum_{i,p}\frac{\partial\widetilde{H}^p}{\partial f^i}\left(f^1,\ldots,f^n\right).i\left(X^p_{f^i}\right)\theta^q$$
$$=-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{H}^q}{\partial f^s}\left(f^1,\ldots,f^n\right)\ df^s,$$

on a

$$i\left(\sum_{i,p}\frac{\partial\widetilde{H}^p}{\partial f^i}\left(f^1,\ldots,f^n\right).X^p_{f^i}\right)\theta^q=-d\widetilde{H}^q\left(f^1,\ldots,f^n\right),$$

d'où

$$X_H=\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\frac{\partial\widetilde{H}^p}{\partial f^s}\left(f^1,\ldots,f^n\right).X^p_{f^i}$$

où, pour tout $i\,(i=1,\ldots,n)$, les k champs de vecteurs $X^1_{f^i},\ldots,X^k_{f^i}$ sont reliés à la fonction basique f^i par la relation

$$i\left(X^1_{f^i}\right)\theta^1=\ldots=i\left(X^k_{f^i}\right)\theta^k=-df^i.$$

On déduit que X_H est une combinaison linéaire des champs de vecteurs $X^p_{f^i}$ avec $1\leq p\leq k$ et $1\leq i\leq n$, dont les coefficients $\frac{\partial\widetilde{H}^p}{\partial f^i}\left(f^1,\ldots,f^n\right)$ sont constants sur chaque arc de trajectoire de X_H contenu dans U, puisque $f^1,\ldots,f^n$ sont des intégrales premières de X_H. Comme les trajectoires de X_H sont connexes, le champ de vecteurs X_H est une combinaison linéaire sur M des $X^p_{f^s}$, dont les coefficients sont constants sur chaque trajectoire du système hamiltonien X_H.
Les champs de vecteurs $X^p_{f^s}$ $(1\leq p\leq k, 1\leq s\leq n)$ engendrent un champ de directions différentiable qui est complètement intégrable puisque $\left[X^p_{f^i},X^q_{f^j}\right]=0$ pour tous $p,q=1,\ldots,k$ et $i,j=1,\ldots,n$. Chaque trajectoire de X_H (ou de l'un des champs de vecteurs $X^p_{f^s}$) est entièrement contenue dans une de ces feuilles puisque X_H et les $X^p_{f^s}$ sont tangents à chaque feuille. On déduit :

Corollaire IV.3 *Les champs de vecteurs* $\left(X^p_{f^s}\right)_{1\leq p\leq k,1\leq s\leq n}$ *engendrent le sous-fibré E subordonné à la structure $k-$symplectique.*

Notons que chaque feuille de ce feuilletage est une sous-variété lagrangienne fermée de M, dont les équations sont $df^i=0$ $(i=1,\ldots,n)$ et que le champ de vecteurs X_H est tangent aux feuilles. Ainsi H^p $\in\mathfrak{A}^0_b(M,\mathfrak{F})$ pour tout $p=1,\ldots,k$.

Proposition IV.3 *L'entier naturel n, qui est la codimension du feuilletage $\mathfrak{F}$, est le nombre maximum de fonctions qui soient à la fois basiques et indépendantes sur M.*

Démonstration. Pour toute fonction basique f pour le feuilletage $\mathfrak{F}$, les champs de vecteurs X^p_f correspondants sont tangents aux feuilles. Si $f^1,\ldots,f^l$ sont l fonctions basiques indépendantes sur M alors, pour tout $x\in M$, le sous espace engendré par les vecteurs $X^p_{f^s}(x)$ est contenu dans E_x. Par suite $lk\leq nk$, d'où $l\leq n$.

Proposition IV.4 *On suppose que X_H est basiquement intégrable. Alors pour tout point a de M, la courbe intégrale de X_H passant par ce point peut être localement déterminée, au voisinage de a par quadratures.*

Démonstration. Soit $a \in M$. Il existe un voisinage ouvert U de a dans M, des fonctions $\left(f^{pi}\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ différentiables sur U telles que $\left(f^{i}, f^{pi}\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ définit un système de coordonnées locales adapté la structure $k-$symplectique $\left(\theta^1, \ldots, \theta^k; E\right)$, c'est à dire :

$$\theta^p_{|U} = \sum_{i=1}^{n} df^{pi} \wedge df^i \text{ et } E_{|U} = \bigcap_{i=1}^{n} \ker df^i.$$

L'équation différentielle définie par X_H s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{df^i}{dt} = \frac{\partial H^p}{\partial f^{pi}} \\ \frac{df^{pi}}{dt} = -\frac{\partial H^p}{\partial f^i} \end{cases}$$

avec ($p = 1, \ldots, k$ et $i = 1, \ldots, n$). Comme

$$H^p = \sum_{j=1}^{n} A_j \left(f^1, \ldots, f^n\right) f^{pj} + B^p \left(f^1, \ldots, f^n\right)$$

on déduit

$$\frac{df^i}{dt} = \frac{\partial H^p}{\partial f^{pi}} = A_i \left(f^1, \ldots, f^n\right).$$

Or les fonctions f^i sont des intégrales premières de X_H donc

$$\frac{df^i}{dt} = \frac{\partial H^p}{\partial f^{pi}} = X_H \left(f^i\right) = 0,$$

d'où pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $F_i \left(f^1, \ldots, f^n\right) = 0$, par conséquent on a $H^p = G^p \left(f^1, \ldots, f^n\right)$ pour tout $p = 1, \ldots, k$. Ainsi

$$\frac{df^{pi}}{dt} = -\frac{\partial H^p}{\partial f^i} = -\frac{\partial B^p}{\partial f^i} \left(f^1, \ldots, f^n\right).$$

Par suite la courbe intégrale de X_H passant par a, pour la valeur 0 du paramètre t, s'exprime au moyen des coordonnés locales $\left(f^{pi}, f^i\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ par:

$$\begin{cases} f^i(t) = f^i(a) \\ f^{pi}(t) = f^{pi}(a) - t\frac{\partial G^p}{\partial f^i} \left(f^1(a), \ldots, f^n(a)\right). \end{cases}$$

La détermination de cette courbe intégrale ne fait intervenir que des quadratures, des éliminations et des dérivations partielles.

Rappelons que tout sous-groupe discret G de $\mathbb{R}^m$ est nécessairement de la forme

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{s} n_i e_i , (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}^s \right\},$$

où $e_1, \ldots, e_s$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^m$, linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^m$.

En complétant $e_1, \ldots, e_s$ en une base $(e_1, \ldots, e_s, \ldots, e_m)$, on voit que l'espace quotient $\mathbb{R}^m/G$ s'identifie au produit $\mathbb{T}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$ où $\mathbb{T}^s$ est le tore de dimension s.

On conviendra de paramétrer le tore $\mathbb{T}^s$ en l'identifiant au quotient $\mathbb{R}^s/2\pi\mathbb{Z}^s$.

Soit $p : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{T}^s$ la projection canonique. Chaque élément $\left(\gamma^1, \ldots, \gamma^s\right)$ de $\mathbb{R}^s$ définit un élément $p\left(\gamma^1, \ldots, \gamma^s\right)$ du tore $\mathbb{T}^s$, on dira que $\left(\gamma^1, \ldots, \gamma^s\right)$ est un système de coordonnées angulaires de l'élément $p\left(\gamma^1, \ldots, \gamma^s\right)$.

Les fonctions coordonnées usuelles de $\mathbb{R}^s$ sont appelées variables angulaires sur le tore $\mathbb{T}^s$.

Soit $f = \left(f^1, \ldots f^n\right) : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable avec $f^1, \ldots f^n$ des fonctions basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$ et soient $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ une valeur régulière de f et N la composante connexe de $f^{-1}(a)$.

Une sous variété N de M est dite totalement isotrope (resp. lagrangienne) si, pour tout $x \in N$, l'espace tangent T_xN est sous espace totalement isotrope (resp. lagrangien) de T_xM^6.

Proposition IV.5 *N est une sous-variété lagrangienne fermée de M et les restrictions à cette sous variété des nk champs de vecteurs $X^p_{f^i}$ $(1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n)$ qui sont linéairement indépendants en chaque point de M sont tangents à N et l'on a $\left[X^p_{f^i}, X^q_{f^j}\right] = 0$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$ et $p, q = 1, \ldots, k$.*

Démonstration. Puisque a est une valeur régulière de $f : M \to \mathbb{R}^n$, alors $f^{-1}(a)$ est une sous-variété fermée de M de dimension nk. Il en est de même pour chacune de ses composantes connexes. Comme $f^{-1}(a)$ est localement connexe alors N est ouverte dans $f^{-1}(a)$. On déduit que $\dim N = \left(\dim f^{-1}(a)\right) = nk$ et l'on a $T_xN \simeq T_xf^{-1}(a) \simeq \ker df^1(x) \cap \ldots \cap \ker df^n(x)$ pour tout $x \in N$.
La sous variété N est totalement isotrope. En effet, pour tout $x \in N$, on a $X^p_{f^i}(x) \in T_xN$, pour tout $p = 1, \ldots, k$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$. Comme les champs de vecteurs $X^p_{f^i}(x)$ $(1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n)$ sont linéairement indépendants en tout point de M forment une base de T_xN car $nk = \dim T_xN$. Les relations $\theta^p\left(X^q_{f^i}(x), X^r_{f^j}(x)\right) = 0$, pour tous $p, q, r = 1, \ldots, k$, et $i, j = 1, \ldots, n$, nous permettent de conclure que T_xN est totalement isotrope pour tout $x \in N$. Par conséquent N est totalement isotrope, et puisque $\dim N = nk$, alors N est une sous variété lagrangienne de M.
Par rapport à un système de coordonnées locales $(x^i, v^{pi})_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$ adaptées à la structure $k-$symplectique, les champs de vecteurs $X^p_{f^j}$ s'écrivent :

$$X^p_{f^j} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial v^{pi}}.$$

En utilisant le lemme de Schwarz, on voit que $\left[X^p_{f^i}, X^q_{f^j}\right] = 0$, ce qui montre la proposition.
Supposons que les restrictions $X^p_{f^i|N}$, des champs de vecteurs $X^p_{f^i}$ à N, sont complètes et désignons par ϕ^{pi} le flot du champ de vecteurs $X^p_{f^j|N}$. Considérons l'application différentiable $\Phi : \mathbb{R}^{nk} \times N \longrightarrow N$ définie par :

$$\Phi_t(x) = \Phi(t, x) = \prod_{p=1}^{k} \prod_{i=1}^{n} \phi^{pi}_{t_{pi}}(x)$$

pour tout $t = (t_{pi})_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{nk}$ et pour tout $x \in N$.

Proposition IV.6 *L'application Φ définit une action transitive et localement libre.*

Démonstration. La relation $\left[X^p_{f^i}, X^q_{f^j}\right] = 0$ montre que les flots des champs de vecteurs $X^p_{f^i|N}$ commutent, par conséquent $\Phi_0 = Id_N$ et $\Phi_t \circ \Phi_{t'} = \Phi_{t+t'}$, pour tout $t \in \mathbb{R}^{nk}$, pour tout $t' \in \mathbb{R}^{nk}$ et Φ définit une action différentiable du groupe abélien $\mathbb{R}^{nk}$ sur N. Pour tout $x \in N$, l'application $g_x : t \longmapsto \Phi_t(x)$ est de rang nk. Ainsi l'action Φ est localement libre, c'est à dire le sous groupe d'isotropie

$$G_x = \left\{t \in \mathbb{R}^{nk}, \Phi(t, x) = x\right\},$$

de chaque point x de N est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^{nk}$. L'orbite $O(x)$ de chaque point $x \in N$, est à la fois ouvert et fermé de N. Comme N est connexe on déduit que $O(x) = N$ pour tout $x \in N$; ainsi, l'action Φ est transitive.

Puisque l'action Φ est transitive, alors N est difféomorphe à $\mathbb{R}^{nk}/G_x$, donc à $\mathbb{T}^s \times \mathbb{R}^{nk-s}$, où s est le nombre de générateurs indépendants de G_x.
Dans les hypothèses et notations ci-dessus, on suppose que les fonctions $f^1, \ldots, f^n$ sont indépendantes en tout point de M.

Proposition IV.7 *Soient $a \in M$ et N la composante connexe de $f^{-1}(f(a))$ contenant le point a. Si N est compacte, alors N est une sous-variété lagrangienne fermée de M qui est invariante par le flot du champ de vecteurs X_H.*
De plus, il existe un difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^{nk}$ sur N définissant un système de variables angulaires $\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right)$ au moyen duquel le flot ϕ de $X_{H|N}$ s'exprime par

$$\phi_t\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right) = \left(\Psi^1 + \omega^1 t, \ldots, \Psi^{nk} + \omega^{nk} t\right)$$

$\omega^1, \ldots \omega^{nk}$ étant des constantes. On dira que ce flot est quasi-périodique.

Démonstration. Comme $f(a)$ est une valeur régulière de f, on déduit de ce qui précède, que N est une sous-variété lagrangienne fermée de M et que les champs de vecteurs $\left(X^p_{f^i}\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ sont tangents à cette sous-variété. N étant compacte, les champs de vecteurs $X^p_{f^i|N}$ sont complets. Comme N est difféomorphe à $\mathbb{T}^s \times \mathbb{R}^{nk-s}$, on déduit que $s = nk$. Il en résulte que le sous-groupe d'isotropie G_a de a, pour l'action Φ, est engendré par nk éléments $e'_1, \ldots, e'_{nk}$ de $\mathbb{R}^{nk}$ formant une base de cet espace.

Considérons l'application

$$\Psi : \mathbb{R}^{nk} \to N,$$

définie par :

$$\Psi\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{nk} \Psi^s e'_s \ , a\right),$$

pour tout $\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right) \in \mathbb{R}^{nk}$. D'après la définition même de Φ, le flot ϕ^{pi} de $X^p_{f^i|N}$ en tout point $y \in N$, est donné par :

$$\phi^{pi}_t(y) = \Phi(te_{pi}, y)$$

où $(e_{pi})_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{nk}$. L'expression de ce flot au moyen des variables $\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}$ est donné par :

$$\phi^{pi}_t\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right) = \left(\Psi^1 + t\omega^1_{pi}, \ldots, \Psi^1 + t\omega^{nk}_{pi}\right)$$

où $\frac{\omega^1_{p,i}}{2\pi}$, ... , $\frac{\omega^{nk}_{p,i}}{2\pi}$ sont les composantes de e_{pi} dans la base $e'_1, \ldots, e'_{nk}$ de $\mathbb{R}^{nk}$.

On sait que tout point de M possède un voisinage ouvert sur lequel on a :

$$H^p = \tilde{H}^p \circ \left(f^1, \ldots, f^n\right),$$

où $\tilde{H}^p$ est une fonction numérique différentiable définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Le champ de vecteurs X_H a pour expression locale :

$$X_H = \sum_{p=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{H}^p}{\partial f^i}\left(f^1, \ldots, f^n\right).X^p_{f^i}.$$

On pose $A^{pi} = \frac{\partial \tilde{H}^p}{\partial f^i}\left(f^1, \ldots, f^n\right)$. On a donc :

$$X_H = \sum_{p=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} A^{pi}.X^p_{f^i}.$$

En utilisant la connexité de N on voit que les coefficients A^{pi} sont constants sur N.
Le flot de X_H s'exprime donc, au moyen des variables angulaires $\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}$, selon

$$\phi_t\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right) = \left(\Psi^1 + \omega^1 t, \ldots, \Psi^{nk} + \omega^{nk} t\right),$$

avec $\omega^s = \sum\limits_{p=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n} A^{pi}\omega^s_{pi}$, pour tout $s = 1, \ldots, nk$.

V. REFERENCES

[1] A. AWANE *Sur une généralisation des structures symplectiques.* Thèse Strasbourg (1984).

[2] A. AWANE *k-symplectic structures.* Journal of Mathematical physics 33(1992) 4046-4052. U.S.A.

[3] A. AWANE *G-espaces k-symplectiques homogènes.* Journal of Geometry and Physics. 13(1994) 139-157. North-Holland.

[4] A. AWANE *Structures k-symplectiques.* Thèse Mulhouse(1992).

[5] A. AWANE *Some affine properties of the k-symplectic manifolds.* "Contribution to Algebra and Geometry *Beiträge zur Algebra und Geometrie*". Volume 39 (1998), No. 1, 75-83.

[6] A.AWANE *Systèmes extérieures k-symplectiques.* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. Vol 56, 1(1998) 65-80.

[7] A. AWANE - M. GOZE. *Pfaffian systems, k-symplectic systems.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/boston/London 2000.

[8] P. DAZORD *Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages lagrangiens.* Ann. Ecole Normale Sup. 14 Paris (1981) 465-480.

[9] J. DIEUDONNE *Eléments d'Analyse.* Gauthiers-Villars (1974).

[10] C. GODBILLON *Géométrie différentielle et Mécanique Analytique.* Hermann. Paris (1969).

[11] M. GOZE - Y. HARAGUCHI *Sur les r-systèmes de contact.* CRAS, Paris, (1982), T294 SI 95-97.

[12] P. LIBERMANN et C.M.MARLE *Géométrie symplectique Bases théorique de la Mécanique classique.* Tomes 1, 2, 3, U.E.R. de Mathématiques, L.A. 212 et E.R.A. 944, 1020, 1021 du C.N.R.S.

[13] P.MOLINO *Géométrie de Polarisation.* Travaux en cours Hermann (1984) 37-53.

[14] P.MOLINO *Géométrie globale des feuilletages riemanniens.* Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser.A, 1,85(1982) 45-76.

[15] Y.NAMBU *Generalized Hamiltonian Dynamics.* Physical Review D Volume 7, Number 8 15 April 1973.

[16] M. PUTA *Some Remarks on the k-symplectic manifolds.* Tensors.109-115.