African Journal Of Mathematical Physics Volume **2** *Number* **2** *(2005) 155-165*

Algèbres de Lie k- Symplectiques Symétriques à Gauche

A. Awane, M. Belam, M. Lahmouz, B. Naanani et S. Fikri

Université HassanII-Mohammedia. Faculté des Sciences Ben M'sik.
B.P. 7955. Boulevard Driss Harti. Casablanca. Maroc.
a.awane@yahoo.fr

Abstract

Nous étudions les algèbres de Lie symétriques à gauche sous jacentes à une structure k-symplectique d'algèbres de Lie. Nous proposons la notion de k-extension en s'inspirant de la notion de double extension introduite par P.Medina et P.Revoy. Cette technique consiste à additionner à une algèbre de Lie k-symplectique de dimension $n(k+1)$ un espace de dimension $k+1$, pour obtenir une algèbre de Lie k-symplectique de dimension $(n+1)(k+1)$. Nous étudions en particulier, le cas d'une algèbre de Lie 2-symplectique de dimension 3 de Heisenberg filiforme.

I. INTRODUCTION

La première apparition des algèbres symétriques à gauche (A.S.G.) dans la littérature se trouve dans les travaux de E. CARTAN[7], puis elles sont utilisées dans les domaines bornés homogènes par J.L. KOZSUL[10] et dans les domaines homogènes convexes par E.B. VINBERG[14], puis J. HELMSTETTER a étudié les A.S.G. nilpotentes[8,9], et par la suite, les A.S.G. ont fait l'objet de la thèse de A. MEDINA[11], et les A.S.G. symplectiques ont fait partie de celle de A. AUBERT[1].
Les algèbres de Lie $k-$symplectiques sont introduites par A. AWANE[2-6]. On se propose d'étudier les A.S.G. sous jacentes à une structure $k-$symplectique.
La structure d'algèbre symétrique à gauche est la donnée d'un espace vectoriel munit d'un multiplication qui vérifie :

$$(XY)Z - X(YZ) = (YX)Z - Y(XZ),$$

Rappelons qu'une connexion plate ∇ munit l'espace $\mathcal{X}(M)$ des champs de vecteurs différentiables sur la variété M, d'une structure d'algèbre symétrique à gauche en prenant la multiplication $XY = \nabla_X Y$[11].
On étudie aussi la notion de $k-$extension des algèbres de Lie $k-$symplectiques, en s'inspirant de la double extension introduite par A. Medina et P. Revoy[12,13], cette technique consiste à additionner à une algèbre de Lie $k-$symplectique de dimension $n(k+1)$ un espace de dimension $k+1$, de façon à obtenir une algèbre de Lie $k-$symplectique de dimension $(n+1)(k+1)$.
Nous donnons en dimension 3, les $2-$extensions de l'algèbre de Lie abélienne et les algèbres de Lie de Heisenberg qui sont aussi filiformes.

II. ALGÈBRES DE LIE K-SYMPLECTIQUES SYMÉTRIQUES À GAUCHE

A. Préliminaire

Rappelons la définition suivante[6] :

Définition II.1 *Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension $n(k+1)$ sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\theta^1,\ldots,\theta^k$ des $2-$formes fermées de $\Lambda^2(\mathcal{G})$ et $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ de codimension n. On dit que $(\theta^1,\ldots,\theta^k;\mathcal{H})$ est une structure k-symplectique sur $\mathcal{G}$ si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *le système extérieur $\left\{\theta^1,\theta^2,\ldots,\theta^k\right\}$ est non dégénéré,*
2. *la sous-algèbre de Lie $\mathcal{H}$ est un sous-espace totalement isotrope par rapport à chacune des 2-formes θ^p, c'est à dire $\theta^p(x,y)=0$ pour tous x,y appartenant à $\mathcal{H}$.*

Définition II.2 *Soit $\mathcal{G}$ un espace vectoriel muni d'un produit bilinéaire :*

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{G}\times\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}\\ (x,y) & \longmapsto & x.y\end{array}$$

On dit que $\mathcal{G}$ est une algèbre symétrique à gauche (A.S.G.) si ce produit vérifie :

$$(x.y)\,.z-x.\,(y.z)=(y.x)\,.z-y.\,(x.z)\,.$$

B. Algèbre de Lie $k-$symplectiques symétrique à gauche

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension $n(k+1)$ sur $\mathbb{K}$, munie d'une structure $k-$symplectique

$$(\theta^1,\ldots,\theta^k;\mathcal{H}),$$

et d'une structure d'algèbres symétriques à gauche

$$\mu:\mathcal{G}\times\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}.$$

Définition II.3 *On dit que μ est sous jacente à la structure k-symplectique $(\theta^1,\ldots,\theta^k;\mathcal{H})$ si la propriété suivante est satisfaite :*

$$\theta^p\left(\mu\left(X,Y\right),Z\right)=-\theta^p\left(Y,[X,Z]\right)$$

pour tous $p\in\{1,\ldots,k\}$ et $X,Y,Z\in\mathcal{G}$.

Soit l'application

$$\begin{array}{rrcl} j: & \mathcal{G} & \longrightarrow & \hom\left(\mathcal{G},\mathbb{K}^k\right)\\ & Z & \longmapsto & \left(i\left(Z\right)\theta^1,\ldots,i\left(Z\right)\theta^k\right),\end{array}$$

la non dégénérescence du système $\left\{\theta^1,\ldots,\theta^k\right\}$ montre que l'application j est injective, donc $\mathcal{G}$ est strictement inclus dans $\hom\left(\mathcal{G},\mathbb{K}^k\right)$ dès que $k\geq 2$, puisque $\dim\left(\mathcal{G}\right)=n(k+1)$ et $\dim\left(\hom\left(\mathcal{G},\mathbb{K}^k\right)\right)=kn\left(k+1\right).$

Pour tous $X,Y\in\mathcal{G}$, on considère l'élément $f_{X,Y}$ de $\hom\left(\mathcal{G},\mathbb{K}^k\right)$ défini par :

$$f_{X,Y}\left(Z\right)=-\left(\theta^1\left(Y,[X,Z]\right),\ldots,\theta^k\left(Y,[X,Z]\right)\right).$$

D'où :

Proposition II.1 *μ est sous-jacente à la structure $k-$symplectique $(\theta^1,\ldots,\theta^k;\mathcal{H})$ si et seulement si pour tous $X,Y\in\mathcal{G}$, on a :*

$$j\left(\mu\left(X,Y\right)\right)=f_{X,Y}.$$

Dans tout ce qui suit nous posons

$$\mu(e_A, e_B) = \sum_C \mu_{A,B}^C e_C,$$

et

$$[e_A, e_B] = \sum_C C_{A,B}^C e_C.$$

Proposition II.2 *Si le produit symétrique à gauche est sous-jacent à la structure $k-$symplectique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; \mathcal{H})$, alors*

$$[X, Y] = \mu(X, Y) - \mu(Y, X), \tag{2.1}$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{G}$

Démonstration. Soient $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ et $p \in \{1, \ldots, k\}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\theta^p([X,Y] - \mu(X,Y) + \mu(Y,X), Z)\\
&\quad= \theta^p([X,Y], Z) - \theta^p(\mu(X,Y), Z) + \theta^p(\mu(Y,X), Z)\\
&\quad= \theta^p([X,Y], Z) + \theta^p(Y, [X,Z]) - \theta^p(X, [Y,Z])\\
&\quad= \theta^p([X,Y], Z) - \theta^p([X,Z], Y) + \theta^p([Y,Z], X)\\
&\quad= \delta\theta^p(X,Y,Z)\\
&\quad= 0.
\end{aligned}$$

Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension $n(k+1)$ dotée par la structure k-symplectique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; \mathcal{H})$, et $(e_{qi}, e_i)_{1 \le q \le k, 1 \le i \le n}$ une base de $\mathcal{G}$ avec $(e_{qi})_{1 \le q \le k, 1 \le i \le n}$ une base de $\mathcal{H}$, étant donné deux éléments X et Y de $\mathcal{G}$, nous étudions ici l'existence d'un élément $\mu(X, Y)$ de $\mathcal{G}$ tel que :

$$\theta^p(\mu(X,Y), Z) = -\theta^p(Y, [X, Z]) \tag{2.2}$$

pour tous $Z \in \mathcal{G}$ et $p \in \{1, \ldots, k\}$.

Proposition II.3 *Si le produit symétrique à gauche μ est sous jacent à la structure $k-$symplectique, alors $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre abélienne pour μ, de plus c'est un idéal pour la même structure.*

Démonstration.

Prenons $i, j, l, m \in \{1, \ldots, n\}$ et $p, q, r, s \in \{1, \ldots, k\}$, le calcul se fait en remplaçant chaque fois X, Y et Z par e_{qi} où e_i, dans l'équation (2.2), on trouve les résultats suivants :

$$\mu_{qi,rj}^l = 0. \tag{2.3}$$

$$\mu_{qi,j}^l = C_{qi,pl}^{pj} = 0. \tag{2.4}$$

$$\mu_{i,rj}^l = C_{i,sl}^j = 0. \tag{2.5}$$

$$\mu_{i,j}^l \delta_s^p = C_{i,sl}^{pj}. \tag{2.6}$$

$$\mu_{qi,rj}^{pl} = -C_{qi,l}^j \delta_r^p = 0. \tag{2.7}$$

$$\mu_{qi,j}^{pl} = C_{qi,l}^{pj}. \tag{2.8}$$

$$\mu_{i,rj}^{pl} = -C_{i,l}^j \delta_r^p. \tag{2.9}$$

$$\mu_{i,j}^{pl} = C_{i,l}^{pj}. \tag{2.10}$$

Les équation (2.3) et (2.7) impliquent que $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre abélienne pour μ.

Les équations (2.4) et (2.5) impliquent le résultat suivant :

Proposition II.4 *Si le produit symétrique à gauche μ est sous jacent à la structure $k-$symplectique, alors $\mathcal{H}$ est un idéal abélien pour $[,]$.*

Nous étudions par la suite, les algèbres de Lie $k-$symplectiques symétriques à gauche en petites dimensions

C. Exemple

Dans ce paragraphe on prend $n = 2$ et $k = 2$, donc on considère une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de dimension 6 munie de la structure 2−symplectique $(\theta^1, \theta^2; \mathcal{H})$ où $\mathcal{H} = vect\{e_1, \ldots, e_4\}$ telle que $(e_1, \ldots, e_4, e_5, e_6)$ soit une base de $\mathcal{G}$ et $(\omega^1, \ldots, \omega^6)$ sa base duale.

La structure 2−symplectique sur $\mathcal{G}$ est donnée par :

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^6 \\ \theta^2 = \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^4 \wedge \omega^6 \\ \mathcal{H} = \ker \omega^5 \cap \ker \omega^6. \end{cases}$$

Etant donnés deux éléments X et Y de $\mathcal{G}$, nous cherchons l'existence d'un élément $\mu(X,Y)$ de $\mathcal{G}$ tel que :

$$\theta^p(\mu(X,Y), Z) = -\theta^p(Y, [X,Z])$$

pour tous $Z \in \mathcal{G}$ et $p \in \{1,2\}$.

Les constantes de structure qui restent sont les suivantes :

$$\begin{array}{l} C^1_{15},\ C^1_{16},\ C^1_{25},\ C^1_{26},\ C^1_{35},\ C^1_{36},\ C^1_{45},\ C^1_{46},\ C^1_{56}, \\ C^2_{15},\ C^2_{16},\ C^2_{25},\ C^2_{26},\ C^2_{35},\ C^2_{36},\ C^2_{45},\ C^2_{46},\ C^2_{56}, \\ C^3_{15},\ C^3_{16},\ C^3_{25},\ C^3_{26},\ C^3_{35},\ C^3_{36},\ C^3_{45},\ C^3_{46},\ C^3_{56}, \\ C^4_{15},\ C^4_{16},\ C^4_{25},\ C^4_{26},\ C^4_{35},\ C^4_{36},\ C^4_{45},\ C^4_{46},\ C^4_{56}, \\ C^5_{56},\ C^6_{56}. \end{array}$$

De plus on a les égalités suivantes :
$C^1_{15} = C^3_{35}, C^2_{15} = C^4_{35}, C^1_{25} = C^3_{45}, C^2_{25} = C^4_{45}$,
$C^1_{16} = C^3_{36}, C^2_{16} = C^4_{36}, C^1_{26} = C^3_{46}, C^2_{26} = C^4_{46}$.
Cette algèbre est définie donc par les équations suivantes :

$$\begin{cases} d\omega^i &= \sum_{j=1}^{6} -C^i_{j5}\omega^j \wedge \omega^5 + \sum_{j=1}^{6} -C^i_{j6}\omega^j \wedge \omega^6, \\ d\omega^5 &= -C^5_{56}\omega^5 \wedge \omega^6, \\ d\omega^6 &= -C^6_{56}\omega^5 \wedge \omega^6. \end{cases}$$

Le produit symétrique à gauche est donné par le tableau suivant :

$\nearrow \mu$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	0	0	0	0	$C^1_{15}e_1 + C^1_{16}e_2 + C^3_{15}e_3 + C^3_{16}e_4$	$C^2_{15}e_1 + C^2_{16}e_2 + C^4_{15}e_3 + C^4_{16}e_4$
e_2	0	0	0	0	$C^1_{25}e_1 + C^1_{26}e_2 + C^3_{25}e_3 + C^3_{26}e_4$	$C^2_{25}e_1 + C^2_{26}e_2 + C^4_{25}e_3 + C^4_{26}e_4$
e_3	0	0	0	0	$C^1_{35}e_1 + C^1_{36}e_2 + C^3_{35}e_3 + C^3_{36}e_4$	$C^2_{35}e_1 + C^2_{36}e_2 + C^4_{35}e_3 + C^4_{36}e_4$
e_4	0	0	0	0	$C^1_{45}e_1 + C^1_{46}e_2 + C^3_{45}e_3 + C^3_{46}e_4$	$C^2_{45}e_1 + C^2_{46}e_2 + C^4_{45}e_3 + C^4_{46}e_4$
e_5	$-C^5_{56}e_2$	$-C^6_{56}e_2$	$-C^5_{56}e_4$	$-C^6_{56}e_4$	$C^1_{56}e_2 + C^3_{56}e_4 + C^1_{15}e_5 + C^1_{25}e_6$	$C^2_{56}e_2 + C^4_{56}e_4 + C^2_{15}e_5 + C^2_{25}e_6$
e_6	$C^5_{56}e_1$	$C^6_{56}e_1$	$C^5_{56}e_3$	$C^6_{56}e_3$	$-C^1_{56}e_1 - C^3_{56}e_3 + C^1_{16}e_5 + C^1_{26}e_6$	$-C^2_{56}e_1 - C^4_{56}e_3 + C^2_{16}e_5 + C^2_{26}e_6$

III. $K-$EXTENSION DES ALGÈBRES DE LIE $K-$SYMPLECTIQUES

A. Préliminaire

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre symétrique à gauche (A.S.G.) c'est-à-dire muni d'un produit bilinéaire qui vérifie :

$$(x.y).z - x.(y.z) = (y.x).z - y.(x.z),$$

si on munie $\mathcal{G}$ du crochet

$$[x,y] = x.y - y.x,$$

on obtient une algèbre de Lie notée $\mathcal{G}_-$,cette algèbre de Lie est dite sous-jascente à la structure symétrique à gauche.

Soit $(\mathcal{G};\theta^1,\ldots,\theta^k)$ est une algèbre de Lie $k-$symplectique, et posons

$$\theta^p(x.y,z) = -\theta^p(y,[x,z])$$

pour tout $p \in \{1,\ldots,k\}$ et pour tous $x,y,z \in \mathcal{G}$.

Proposition III.1 *Le produit $(x,y) \longmapsto x.y$ est symétrique à gauche.*

Pour démontrer cette proposition on aura besoin du lemme suivant :

Lemme III.1 *Soit f un endomorphisme de $\mathcal{G}$. Alors il existe un endomorphisme unique f^* de $\mathcal{G}$ vérifiant*

$$\theta^p(x,f(z)) = -\theta^p(f^*(x),z)$$

pour tout $p \in \{1,\ldots,k\}$ et pour tous $x,z \in \mathcal{G}$.

Preuve. L'endomorphisme f^* est bien défini, de plus le système $\{\theta^1,\ldots,\theta^k\}$ est non dégénéré ce qui assure l'unicité de f^*.

Démonstration de la proposition III.1.

i) Soit $x \in \mathcal{G}$, en appliquant le lemme précédent à $f = ad_x$, on trouve $f^*(y) = x.y$.

ii) Le produit $(x,y) \longmapsto x.y$ vérifie $x.y - y.x = [x,y]$, en effet pour tout $p \in \{1,\ldots,k\}$ on a :

$$\theta^p(x.y - y.x, z) = \theta^p(y,[z,x]) + \theta^p(x,[y,z])$$

or $d\theta^p = 0$, donc

$$\theta^p(x,[y,z]) + \theta^p(y,[z,x]) + \theta^p(z,[x,y]) = 0,$$

ce qui donne

$$\theta^p(x.y - y.x, z) = -\theta^p(z,[x,y]) = \theta^p([x,y],z)$$

pour tout $z \in \mathcal{G}$ et pour tout $p \in \{1,\ldots,k\}$, et puisque le système $\{\theta^1,\ldots,\theta^k\}$ est non dégénéré, alors $x.y - y.x = [x,y]$.

iii) Soient $x,y,z,t \in \mathcal{G}$, on a : $\theta^p(x.(y.z) - y.(x.z) - (x.y).z + (y.x).z, t) =$

$$\begin{aligned}
&= \theta^p(x.(y.z),t) - \theta^p(y.(x.z),t) - \theta^p([x,y].z,t) \\
&= -\theta^p(y.z,[x,t]) + \theta^p(x.z,[y,t]) + \theta^p(z,[[x,y],t]) \\
&= \theta^p(z,[y,[x,t]]) - \theta^p(z,[x,[y,t]]) - \theta^p(z,[t,[x,y]]) \\
&= -\theta^p(z,[[t,x],y]) - \theta^p(z,[[y,t],x]) - \theta^p(z,[[x,y],t]) \\
&= -\theta^p(z,[[t,x],y] + [[y,t],x] + [[x,y],t]) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'après l'identitéidetité de Jacobi, ce qui implique que

$$x.(y.z) - y.(x.z) = (x.y).z - (y.x).z$$

pour tous $x, y, z \in \mathcal{G}$.

Proposition III.2 *Si* $\left(\mathcal{G}_{-}, \theta^1, \ldots, \theta^k\right)$ *est une algèbre de Lie* $k-$*symplectique, alors pour tout* $p \in \{1, \ldots, k\}$ *et pour tous* $x, y, z \in \mathcal{G}_{-}$ *on a :*

i) $\theta^p(x.y, z) + \theta^p(z.y, x) = 0$,

ii) $\sum\limits_{cycl} \theta^p(x.y, z) = 0$,

ou $\sum\limits_{cycl}$ *désigne la somme cyclique des éléments* x, y *et* z.

Rappelons les deux définitions suivantes[11] :

Définition III.1 *Soit* $\mathcal{G}$ *une A.S.G. on appelle noyau de* $\mathcal{G}$ *l'idéal bilatère de* $\mathcal{G}$ *défini par :*

$$N(\mathcal{G}) = \{a \in \mathcal{G};\ L_a = R_a = 0\},$$

où L_a *et* R_a *désignent respectivement les translations à gauche et à droite.*

Définition III.2 *On appelle centre de l'algèbre de Lie* $\mathcal{G}_{-}$ *la sous-algèbre de Lie définie par :*

$$Z(\mathcal{G}_{-}) = \{a \in \mathcal{G}; [a, x] = [x, a], \forall x \in \mathcal{G}\}.$$

Il est clair que

$$N(\mathcal{G}) \subset Z(\mathcal{G}_{-}),$$

de plus on a :

Lemme III.2 *Si l'algèbre* $\mathcal{G}$ *est* $k-$*symplectique alors :*

$$N(\mathcal{G}) = Z(\mathcal{G}_{-}).$$

Preuve. Les équations :

$$\begin{cases} \theta^1(ab, c) = -\theta^1(b[a, c]), \\ \cdots \\ \theta^k(ab, c) = -\theta^k(b[a, c]), \end{cases}$$

montrent que si $a \in Z(\mathcal{G}_{-})$ alors $L_a = 0$ et $R_a = 0$.

Définition III.3 *Soient* A *une algèbre symétrique à gauche et* M *un espace vectoriel.*
On dit que M *est un* $A-$*module si la loi externe :*

$$\begin{array}{ccc} A \times M & \longrightarrow & M \\ (a, m) & \longmapsto & am \end{array} \quad et \quad \begin{array}{ccc} M \times A & \longrightarrow & M \\ (m, a) & \longmapsto & ma \end{array}$$

vérifient :

$$a(bm) - b(am) = [a, b]m,$$
$$a(mb) - (am)b = m(ab) - (ma)b,$$

pour tous $a, b \in A$ *et* $m \in M$.

Soit M un $A-$module et considérons $\mathbb{K}$ comme un $A-$module trivial.

Définition III.4 *Un $2-$cocycle (scalaire) de A à coefficients dans $\mathbb{K}$, est une application bilinéaire $f : A \times A \longmapsto \mathbb{K}$ qui vérifie la condition suivante:*

$$f(xy - yx, z) = f(x, yz) - f(y, xz) \tag{3.1}$$

pour tous x, y et $z \in A$.

Définition III.5 *Un $2-$cobord (scalaire) de A à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un $2-$cocycle de la forme*

$$f(a, b) = \varphi(ab),$$

où φ est une forme linéaire sur A, c'est à dire $\varphi \in A^*$.

Notation

$Z^2_{SG}(A, \mathbb{K})$	l'espace des $2-$cocycles.
$B^2_{SG}(A, \mathbb{K})$	l'espace des $2-$cobords.
$H^2_{SG}(A, \mathbb{K})$	$= Z^2_{SG}(A, \mathbb{K})/B^2_{SG}(A, \mathbb{K})$.

Définition III.6 *Soit A_- l'algèbre de Lie sous-jascente à l'algèbre symétrique à gauche A, et soit N un A_--module.*
Un $1-$cocycle de A est une application linéaire u de A dans N qui vérifie

$$u([a, b]) = a.u(b) - b.u(a)$$

pour tous $a, b \in A_-$.
Un $1-$cobord est un $1-$cocycle de la forme

$$u(a) = a.n_0$$

où $n_0 \in N$ pour tout $a \in A$.

Notation

$Z^1_L(A, N)$	l'espace des $1-$cocycles.
$B^1_L(A, N)$	l'espace des $1-$cobords.
$H^1_L(A, N)$	$= Z^1_L(A, N)/B^1_L(A, N)$.

B. Notion de $k-$extension

Lemme III.3 *Si $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie $k-$symplectique et si on considère $\mathcal{G}$ comme $\mathcal{G}-$module pour la représentation adjointe alors, les relations :*

$$\begin{cases} f_1(a, b) = \theta^1 (u(a), b) \\ \vdots \\ f_k(a, b) = \theta^k (u(a), b) \end{cases}$$

induisent un isomorphisme entre $H^2_{SG}(\mathcal{G}, \mathbb{K}) \times \ldots \times H^2_{SG}(\mathcal{G}, \mathbb{K}) = \left(H^2_{SG}(\mathcal{G}, \mathbb{K})\right)^k$ et $H^1_L(\mathcal{G}, \mathcal{G})$.

Preuve. Pour tout $p \in \{1, \ldots, k\}$ soit $f_p \in Z^2_{SG}(\mathcal{G}, \mathbb{K})$, alors :

$$f_p([a, b], c) = f_p(a, bc) - f_p(b, ac) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{G}.$$

Si on pose $\theta^p (u(a), b) = f_p(a, b)$, alors le fait que le système $\left\{\theta^1, \ldots, \theta^k\right\}$ est non dégénéré implique que u est un automorphisme de A.
De plus on a :

$$\begin{aligned} (3.1) \iff \theta^p (u([a, b]), c) &= \theta^p (u(a), bc) - \theta^p (u(b), ac) \\ \iff \theta^p (u([a, b]), c) &= -\theta^p (bu(a), c) + \theta^p (au(b), c) \\ \iff u([a, b]) &= -bu(a) + au(b), \end{aligned}$$

donc se donner $(f_1,\ldots,f_k)$ dans $\left(Z^2_{SG}(\mathcal{G},\mathbb{K})\right)^k$ équivaut à se donner u dans $Z^1_L(\mathcal{G},\mathcal{G})$.
On a aussi

$$\begin{aligned} f_p\in B^2_{SG}(\mathcal{G},\mathbb{K}) &\iff \exists\,\varphi\in\mathcal{G}^*|\forall a,b\in\mathcal{G}\ \ f_p(a,b)=\varphi(ab)\\ &\iff \exists\,a_0\in\mathcal{G}|\forall a,b\in\mathcal{G}\ \ f_p(a,b)=\theta^p\,(a_0,ab)\\ &\iff \exists\,a_0\in\mathcal{G}|\forall a,b\in\mathcal{G}\ \ \theta^p\,(u(a),b)=-\theta^p\,(aa_0,b)\\ &\iff \exists\,a_0\in\mathcal{G}|\forall a\in\mathcal{G}\ \ u(a)=-aa_0.\end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$(f_1,\ldots,f_k)\in\left(B^2_{SG}(\mathcal{G},\mathbb{K})\right)^k\iff u\in B^1_L(\mathcal{G},\mathcal{G}).$$

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie $k-$symplectique, et soit I un idéal bilatère de $\mathcal{G}$ de dimension 1, on suppose que l'orthogonal de I qui est défini par :

$$I^\perp=\{x\in\mathcal{G};\theta^p\,(x,y)=0,(\forall y\in\mathcal{G})\,(\forall p\in\{1,\ldots,k\})\}$$

est un idéal bilatère et on pose $I=\mathbb{K}e$.
Considérons les droites $\mathbb{K}d_i$ ou $i\in\{1,\ldots,k\}$, en dualité avec I, où $d_i\in\mathcal{G}$ vérifie $\theta^p\,(e,d_p)=1$, et soit $\hat{B}=(vect\{e,d_1,\ldots,d_k\})^\perp$, alors on identifie $\mathcal{G}$ à $\mathbb{K}e\oplus\hat{B}\oplus\mathbb{K}d_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{K}d_k$et $I^\perp$ à $\mathbb{K}e\oplus\hat{B}$.
On définit le produit sur $I^\perp$ par:

$$(\lambda e+a)(\mu e+b)=\sum_{p=1}^k f_p(a,b)e+a*b$$

pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ et $a,b\in\hat{B}$, où $a*b$ est la composante de ab sur $\hat{B}$.

Proposition III.3 *Pour que ce produit soit symétrique à gauche, il faut et il suffit que l'application* $(a,b)\longmapsto a*b$ *fait de* $\hat{B}$ *une algèbre symétrique à gauche et* f_p *soient dans* $Z^2_{SG}(A,\mathbb{K})$*, pour tout* p*.*

Preuve. Soit $(\lambda e+a),(\mu e+b)$ et $(\gamma e+c)$ trois éléments de $I^\perp$, on a

$$[(\lambda e+a)(\mu e+b)](\gamma e+c)-(\lambda e+a)[(\mu e+b)(\gamma e+c)] \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} &=\ (\textstyle\sum_{p=1}^k f_p(a,b)e+a*b))(\gamma e+c)-(\lambda e+a)(\sum_{p=1}^k f_p(b,c)e+b*c)\\ &=\ \textstyle\sum_{p=1}^k f_p(a*b,c)e+(a*b)*c-\sum_{p=1}^k f_p(a,b*c)e-a*(b*c)\\ &=\ \textstyle\sum_{p=1}^k f_p(a*b-b*a,c)e+\sum_{p=1}^k f_p(b*a,c)e+(a*b)*c-\sum_{p=1}^k f_p(a,b*c)e-a*(b*c).\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$[(\mu e+b)(\lambda e+a)](\gamma e+c)-(\mu e+b)[(\lambda e+a)(\gamma e+c)] \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &=\ (\textstyle\sum_{p=1}^k f_p(b,a)e+b*a))(\gamma e+c)-(\mu e+b)(\sum_{p=1}^k f_p(a,c)e+a*c)\\ &=\ \textstyle\sum_{p=1}^k f_p(b*a,c)e+(b*a)*c-\sum_{p=1}^k f_p(b,a*c)e-b*(a*c).\end{aligned}$$

Donc avoir (3.2) = (3.3) (i.e. $I^\perp$ est A.S.G.) équivaut à avoir

$$\sum_{p=1}^k f_p(a*b-b*a,c)=\sum_{p=1}^k f_p(a,b*c)+\sum_{p=1}^k f_p(b,a*c)$$

$$(a*b)*c-a*(b*c)=(b*a)*c-b*(a*c)$$

c'est à dire $f_p\in Z^2_{SG}(\mathcal{G},\mathbb{K})$ et $(\hat{B},*)$ est A.S.G.

Remarque III.1 *L'isomorphisme canonique d'espaces vectoriels*

$$\begin{array}{rccl}\varphi: & \hat{B} & \longrightarrow & B = I^{\perp}/I \\ & a & \longmapsto & \bar{a}\end{array}$$

est un isomorphisme d'A.S.G. par restriction et passage au quotient.

Dans ce qui suit nous identifierons $\hat{B}$ et $B = I^{\perp}/I$.
Etudions en détail le produit symétrique à gauche de $\mathcal{G}$, alors pour tous $a, b \in B$ le produit :

$$(0,\ldots,0,a)(0,\ldots,0,b) = (f_1(a,b),\ldots,f_k(a,b),ab)$$

ou $f_p(a,b) = \theta'^{p}(a,b)$ et $,\theta'^{p} = \theta|_B$ c'est à dire $\theta^p((0,\ldots,0,a),(0,\ldots,0,b)) = \theta'^{p}(a,b)$.
On a

$$e(0,\ldots,0,a) = (0,\ldots,0,a)\,e = 0,$$

nous identifions $\mathcal{G}$ à $I^{\perp} \oplus \mathbb{K}d_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}d_k$ où $\theta^p((\lambda,a),d_p) = \lambda$,
donc $d_pe = ed_p = 0$ puisque $e \in N(\mathcal{G})$, nous avons encore

$$\theta^p(ab,c) = -\theta^p(b,[a,c]) \ \ \forall a,b,c \in \mathcal{G}$$

ce qui donne

$$\begin{array}{rcl}\theta^p(ad_p,b) & = & -\theta^p(d_p,[a,b]) \\ & = & -\theta^p(d_pa,b) + \theta^p(d_pa,b) \\ & = & f_p(a,b) - f_p(b,a) \\ & = & \theta'^{p}(\delta a,b) - \theta'^{p}(\delta b,a) \\ & = & \theta'^{p}(\delta a,b) + \theta'^{p}(\delta^* a,b) \\ & = & \theta'^{p}((\delta+\delta^*)a,b),\end{array}$$

où δ^* est l'opérateur adjoint de δ qui est défini par

$$\theta^p(\delta x,y) = \theta^p(x,\delta^* y) \ \ \forall x,y \in \mathcal{G}, \ \forall p \in \{1,\ldots,k\},$$

ce qui implique

$$ad_p = (\delta+\delta^*)a + \varphi_p(a)\,e \text{ où } \varphi_p(a) \in \mathbb{K}.$$

Et on a

$$\begin{array}{rcl}\theta^p(ab,d_p) & = & -\theta^p(b,[a,d_p]) \\ & = & f_p(a,b) \\ & = & \theta'^{p}(ab,d_p)\end{array}$$

ce qui donne :

$$[a,d_p] = \delta a + \psi_p(a)\,e \text{ où } \psi_p(a) \in \mathbb{K}.$$

De plus

$$d_pa = ad_p - [a,d_p] = \delta^* a + (\varphi_p(a) - \psi_p(a))\,e$$

or

$$\theta^p(d_pa,d_p) = -\theta^p(a,[d_p,d_p]) = 0$$

donc

$$\varphi_p(a) = \psi_p(a) \ \ \forall p \in \{1,\ldots,k\},$$

c'est à dire $d_p a$ n'a pas de composantes suivant e, de plus

$$\theta^p\left(d_p^2, a\right) = -\theta^p\left([a, d_p], d_p\right) = \varphi_p(a)$$

et

$$\theta^p\left(d_p^2, d_p\right) = 0$$

ce qui signifie que $d_p^2 \in B$.

Conclusion

La loi d'algèbre de Lie et le produit symétrique à gauche sont donnés par :

$$\begin{cases} [d_p, e] = d_p e - e d_p = 0 \\ [d_p, a] = d_p a - a d_p = -\theta'^p\left(d_p^2, a\right) e - \delta a \end{cases}$$

C. La $2-$extension des algèbre de Lie nilpotentes de dimension 3.

Dans ce paragraphe nous donnons les $2-$extensions des algèbre de Lie de dimension 3.

1. La $2-$extension de l'algèbre de Heisenberg de dimension 3.

   Soit $\mathcal{H}_3 = vect\{X_1, X_2, X_3\}$, l'algèbre de Heisenberg de dimension 3, telle que $[X_1, X_3] = X_2$, munie de la structure $2-$symplectique

   $$\begin{cases} \theta'^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta'^2 = \omega^2 \wedge \omega^3. \end{cases}$$

   On complète $\mathcal{H}_3$ par l'espace $vect\{X_4, X_5, X_6\}$ et on étend les formes θ'^1 et θ'^2 par les formes θ^1 et θ^2 définies par

   $$\begin{cases} \theta'^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^4 \wedge \omega^6 \\ \theta'^2 = \omega^2 \wedge \omega^3 + \omega^5 \wedge \omega^6 \end{cases}$$

   Soit $\delta = [X_1, .]$, ce qui donne $\delta^* = -\mu(X_1, .)$.

   Les $2-$extensions de cette algèbre sont isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

   $h_1 : [X_1, X_3] = X_2,\ [X_1, X_4] = X_1 + X_2,\ [X_1, X_5] = X_1 + X_2.$

   $h_2 : [X_1, X_3] = X_2,\ [X_1, X_4] = X_1 + X_2,\ [X_1, X_5] = X_1.$

   $h_3 : [X_1, X_3] = X_2,\ [X_1, X_4] = X_1,\ [X_1, X_5] = X_1.$

   $h_4 : [X_1, X_3] = X_2,\ [X_1, X_4] = X_1,\ [X_1, X_5] = X_2.$

   $h_5 : [X_1, X_3] = X_2,\ [X_1, X_4] = X_1.$

   $h_6 : [X_1, X_3] = X_2.$

2. La $2-$extension de l'algèbre de Lie abélienne de dimension 3.

   Soit $\mathcal{A}_3 = vect\{X_1, X_2, X_3\}$, l'algèbre de Lie abélienne de dimension 3, munie de la structure $2-$symplectique

   $$\begin{cases} \theta'^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta'^2 = \omega^2 \wedge \omega^3. \end{cases}$$

   On complète $\mathcal{A}_3$ par l'espace $vect\{X_4, X_5, X_6\}$ et on étend les formes θ'^1 et θ'^2 par les formes θ^1 et θ^2 définies par

   $$\begin{cases} \theta'^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^4 \wedge \omega^6 \\ \theta'^2 = \omega^2 \wedge \omega^3 + \omega^5 \wedge \omega^6 \end{cases}$$

Soit $\delta = [X_1, .]$, ce qui donne $\delta^* = -\mu(X_1, .)$.

Les $2-$extensions de cette algèbre sont isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

$a_1 : [X_1, X_4] = X_1 + X_2$, $[X_1, X_5] = X_1 + X_2$.

$a_2 : [X_1, X_4] = X_1 + X_2$, $[X_1, X_5] = X_1$.

$a_3 : [X_1, X_4] = X_1$, $[X_1, X_5] = X_1$.

$a_4 : [X_1, X_4] = X_1$, $[X_1, X_5] = X_2$.

$a_5 : [X_1, X_4] = X_1$.

a_6 : l'algèbre abélienne de dimension 6.

IV. REFERENCES

[1] A. AUBERT *Structures affines et pseudo-métriques invariantes à gauche sur des groupes de Lie*, Thèse Montpellier II (dec. 1996).

[2] A. AWANE *Sur une généralisation des structures symplectiques.* Thèse Strasbourg (1984).

[3] A. AWANE *k-symplectic structures* . Journal of Mathematical physics 33(1992) 4046-4052. U.S.A.

[4] A. AWANE *Structures k-symplectiques.* Thèse Mulhouse(1992).

[5] A. AWANE *Some affine properties of the k-symplectic manifolds. Beiträge zur Algebra und Geometrie* "Contribution to Algebra and Geometry" Volume 39 (1998) N°.1, 75 − 83. Germany.

[6] A. AWANE - M. GOZE. *Pfaffian systems, k-symplectic systems.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/boston/London 2000.

[7] E. CARTAN. *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes,* Anales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t 12 B, p 1-99 (1898).

[8] J. HELMSTETTER. *Algèbres symétriques à gauche,* C. R. Acad. Sci. Paris, 272, p 1088-1091 (1971).

[9] J. HELMSTETTER. *Radical et groupe formel d'une algèbre symétrique à gauche,* Thèse Troisième Cycle, Grenoble. (1975).

[10] J.L. KOSZUL. *Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affines,* Bull. Soc. Math. France, 89, p 515-533 (1961).

[11] A. MEDINA. *Autour des connexions plates invariantes à gauche sur les groupes de Lie,* Thèse Montpellier (1979).

[12] A. MEDINA, P. Revoy. *Algèbres de Lie orthogonales et modules orthogonaux,* Comm. in Algebras, 21(7) 2295-2315 (1993).

[13] A. MEDINA, P. Revoy. *Groupes de Lie à Structure Symlectique Invariante,* Symplectic geometry, groupoïds and systems, Séminaire Sud Rhodanien, (Edit. P. Dazord, A. Weinstein), Springer Verlag, p 247-266 (1991).

[14] E. B. VINBERG. *Convex homogeneous cones,* Translation of de Moscow Math. Soc. N° 12, p 340-403.