African Journal Of Mathematical Physics Volume **2** Number **2** (2005)167-172

Algèbres de Lie Symplectiques d'Ordre k

A.Awane, M. Belam, S. Fikri, M. Lahmouz, B. Naanani

Université HassanII-Mohammedia. Faculté des Sciences Ben M'sik.
B.P. 7955. Boulevard Driss Harti. Casablanca. Maroc.
a.awane@yahoo.fr

Abstract

La notion d'algèbre de Lie symplectiques d'ordre k repose sur l'existence sur l'espace des k-formes différentielles, au dessus d'une n-variété B, d'une $(k+1)$-forme généralisant la forme de Liouville sur le fibré tangent. Le cas particulier $k = 1$ correspond à une structure symplectique classique dotée d'un feuilletage lagrangien ; cette dernière structure est usuellement appelée polarisation réelle au sens de Molino, Clark et Goel. Les structures de contact d'ordre supérieur, développées au sein du Laboratoire de Mathématiques de Mulhouse dont l'idée maîtresse a été suggérée depuis longtemps par G.Reeb, sont reliées à la géométrie multisymplectique d'une manière analogue aux structures symplectiques et structures de contact, ou encore, structures k-symplectiques et k-systèmes de contact. Dans ce contexte, G.Martin a donné une extension du théorème de Darboux-Moser-Weinstein et a présenté une nouvelle classe de structures dynamiques. Ici, l'étude des structures symplectiques d'ordre k invariantes à gauche sur un groupe de Lie, nous ont conduit à étudier les algèbres de Lie symplectiques d'ordre k nilpotentes et leurs classifications en petite dimension.

I. ALGÈBRES DE LIE SYMPLECTIQUES D'ORDRE K, SYMÉTRIQUES À GAUCHE

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension $n + C_n^k$, sur $\mathbb{K}$ avec

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

munie d'une structure symplectique d'ordre k, $(\Omega, \mathcal{H})$ et d'une structure d'algèbres symétriques à gauche $\mu \ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$

Définition I.1 *On dit que μ est sous-jacente à la structure symplectique d'ordre k, $(\Omega, \mathcal{H})$ si la propriété suivante est satisfaite :*

$$i(\mu(X,Y))i(Z)\Omega = -i(Y)i([X,Z])\Omega$$

pour tous X, Y et Z dans $\mathcal{G}$.

Soit $\begin{array}{rccc} j: & \mathcal{G} & \longrightarrow & \Lambda^k(\mathcal{G}) \\ & Z & \longrightarrow & i(Z)\Omega \end{array}$. La non dégénerescence de Ω montre que l'application j est injective, donc $\mathcal{G}$ est strictement inclus dans $\Lambda^k(\mathcal{G})$, dès que $k \geqslant 2$.

Pour tous X, Y et Z dans $\mathcal{G}$,on considère l'élément $f_{X,Y}$ de $\Lambda^k(\mathcal{G})$ défini par : $f_{X,Y}(Z) = -i(Y)i([X,Z])\Omega$
Ainsi, μ est sous - jacente à la structure symplectique d'ordre k, $(\Omega, \mathcal{H})$ si et seulement si pour tous X, Y dans $\mathcal{G}$, on a :

$$j(\mu(X,Y)) = f_{X,Y}$$

Dans ce qui suit, nous posons :

$$\mu(e_A, e_B) = \sum_c \mu^c_{AB} e_c$$

$$[e_A, e_B] = \sum_c C^c_{AB} e_c$$

Soit $(e_{i_1\ldots i_k}, e_1, \ldots, e_n)_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}$ une base de $\mathcal{G}$, avec $(e_{i_1\ldots i_k})_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}$ base de $\mathcal{H}$.
Etant donné deux éléments X et Y de $\mathcal{G}$, ici on cherche à étudier l'existence d'un élément $\mu(X,Y)$ de $\mathcal{G}$ tel que :
$i(\mu(X,Y))i(Z)\Omega = i(Y)i([X,Z])\Omega$ pour tous Z dans $\mathcal{G}$.

Théorème I.1 *Si le produit symétrique à gauche est sous-jacent à la structure symplectique d'ordre k, alors $\mathcal{H}$ est un idéal abélien pour le crochet de Lie.*

Démonstration. Comme

$$\Omega = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \omega^{i_1\ldots i_k} \wedge \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k}$$

où $(\omega^{i_1\ldots i_k}, \omega^1, \ldots, \omega^n)_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}$ la base de $\mathcal{G}^*$; alors

$$\Omega(e_r, e_t, e_{r_1\ldots r_k}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_{k-1}}) = \begin{cases} 0 \text{ si } rtj_2\ldots j_{k-1}\neq r_1\ldots r_k \text{ pour toutes les permutations} \\ \pm 1=\varepsilon \text{ si } rtj_2\ldots j_{k-1}=r_1\ldots r_k \text{ à une permutation près.} \end{cases}$$

Par la même occasion, on trouve que $\mu^t_{i_1\ldots i_k i} = 0$, pour tout $t = 1, \ldots, n$.

Proposition I.1 *Si le produit symétrique à gauche μ est sous-jacent à la structure symplectique d'ordre k, alors $\mathcal{H}$ est un idéal pour μ.*

II. CARACTÉRISATION DES ALGÈBRES DE LIE SYMPLECTIQUES D'ORDRE 2 AFFINES.

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension $c(n,2)$ sur $\mathbb{K}$, munie d'une structure symplectique d'ordre 2, $(\Omega, \mathcal{H})$. Supposons que la structure d'algèbres symétriques à gauche correspondante $\mu : \mathcal{G}\times\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}$ est sous-jacente à la structure symplectique d'ordre 2, $(\Omega, \mathcal{H})$; donc $i(\mu(X,Y))\, i(Z)\, \Omega = -i(Y)\, i([X,Z])\, \Omega$ pour tous X, Y, Z de $\mathcal{G}$.

Théorème II.1 *Soit $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie affine, munie d'une structure symplectique d'ordre $2, (\Omega, \mathcal{H})$.*

Si la structure d'algèbre symétrique à gauche correspondante $\mu : \mathcal{G}\times\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}$ est sous-jacente à la structure symplectique d'ordre 2, $(\Omega, \mathcal{H})$ alors

$$\Omega([X,Y], Z, T) = -\Omega(X, [Y,Z], T)$$

pour tous $X, Y, Z, T \in \mathcal{G}$.

III. APPLICATION

A. Algèbres de Lie symétriques à gauche de dimension 3, symplectiques d'ordre 2.

Proposition III.1 *La seule algèbre de Lie affine de dimension 3, symplectique d'ordre 2, est l'algèbre abélienne.*

B. Algèbres de Lie symétriques à gauche de dimension 6,symplectiques d'ordre 2.

Proposition III.2 *La seule algèbre de Lie affine, symplectique d'ordre 2, symétrique à gauche de dimension 6 $\{\ (n,k)=(3,2)\ \}$ est l'algèbre abélienne.*

IV. CARACTÉRISATION DES ALGÈBRES DE LIE SYMÉTRIQUES À GAUCHE, SYMPLECTIQUES D'ORDRE $K \geq 3$.

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension $C_n^k + n$, munie d'une structure symplectique d'ordre $k, (\Omega, \mathcal{H})$.

Soit $(e_{i_1 \ldots i_k}, e_1, \ldots, e_n)_{1 \leq\ i_1 < \ldots <\ i_k \leq\ n}$ une base de $\mathcal{G}$, avec $(e_{i_1 \ldots i_k})_{1 \leq\ i_1 < \ldots < i_k \leq\ n}$ base de $\mathcal{H}$.

supposons que la structure d'algèbre symétrique à gauche μ est sous-jacente à la structure symplectique d'ordre k, $(\Omega, \mathcal{H})$; donc

$$\Omega(\mu(X,Y), Z_1, \ldots, Z_k) = -\Omega(Y, [X, Z_1], Z_2, \ldots, Z_k)$$

pour tous $X, Y, Z_1, \ldots, Z_k$ de $\mathcal{G}$.

Théorème IV.1 *Soit $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie affine, munie d'une structure symplectique d'ordre $k \geq 3, (\Omega, \mathcal{H})$.*

Si la structure d'algèbre symétrique à gauche correspondante $\mu\ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ est sous-jacente à la structure symplectique d'ordre k, $(\Omega, \mathcal{H})$; alors

$$(k-1)\Omega([X,Y], Z_1, \ldots, Z_i, \ldots, Z_k) + \sum_{1 \leq\ i<j \leq k}^{k} (-1)^{i+j} \Omega([Z_i, Z_j], X, Y, \ldots, \check{Z}_i, \ldots, \check{Z}_j, \ldots, Z_k) = 0$$

pour tous $X, Y, Z_1, \ldots Z_k \in \mathcal{G}$.

L'étude des algèbres de Lie symplectiques d'ordre k nilpotentes, utilise le théorème de classification[4].

Théorème IV.2 *(***Théorème de classification***)*

Soient E un espace vectoriel de dimension $c(n,k)$ et $(\Omega, \mathcal{F})$ une structure symplectique d'ordre k sur E, alors il existe une base $(\omega^{i_1 \cdots i_k}, \omega^1, \ldots, \omega^n)_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}$ de E^* telle que :

$$\Omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega^{i_1 \cdots i_k} \wedge \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k};$$

et

$$\mathcal{F} = \ker \omega^1 \cap \ldots \cap \ker \omega^n\ .$$

V. ALGÈBRES DE LIE SYMPLECTIQUES D'ORDRE K, NILPOTENTES

A. Algèbres de Lie symplectiques d'ordre 2 nilpotentes

1. Classification en dimension inférieure ou égale à 6.

Notons bien que les classifications données dans ce paragraphe ne concernent que les algèbres de Lie complexes et que les crochets non définis sont nuls.

2. Dimension 3 $\quad (n,k)=(2,2)$

n_1^3 : l'algèbre abélienne.
n_2^3 : l'algèbre de Heisenberg définie par $[X_1,X_3]=X_2$.
On a alors le résultat suivant :

Théorème V.1 *Toute algèbre de Lie nilpotente de dimension* 3*, est une algèbre de Lie symplectique d'ordre* 2*, nilpotente.*

3. Caractérisation des algèbres de Lie symplectiques d'ordre 2*, de dimension* 6

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension 6 sur $\mathbb{C}$, munie d'une structure symplectique d'ordre 2, alors il existe une base $\{X_1,X_2,\ldots,X_6\}$ de $\mathcal{G}$, de base duale $\{\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^6\}$ telle que :
$\Omega=\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^4+\omega^1\wedge\omega^3\wedge\omega^5+\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega^6$.
Et $\mathcal{H}$ la sous algèbre de Lie engendrée par $\{X_4,X_5,X_6\}$.
Ω étant fermée sur $\mathcal{G}$ donc $d\Omega=0$
d'où
$d\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^4-\omega^1\wedge d\omega^2\wedge\omega^4+\omega^1\wedge\omega^2\wedge d\omega^4$
$+d\omega^1\wedge\omega^3\wedge\omega^5-\omega^1\wedge d\omega^3\wedge\omega^5+\omega^1\wedge\omega^3\wedge d\omega^5$
$+d\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega^6-\omega^2\wedge d\omega^3\wedge\omega^6+\omega^2\wedge\omega^3\wedge d\omega^6=0.$
Donc on a :

$$(S)\begin{cases} -C_{13}^1-C_{23}^2+C_{34}^4-C_{24}^5+C_{14}^6=0\\ C_{15}^1+C_{25}^2+C_{45}^4-C_{24}^3=0\\ C_{16}^1+C_{26}^2+C_{46}^4+C_{14}^3=0\\ -C_{35}^1-C_{24}^1+C_{45}^6=0\\ -C_{36}^1-C_{24}^2-C_{34}^3+C_{46}^6=0\\ C_{36}^1+C_{24}^2+C_{34}^3+C_{46}^6=0\\ C_{35}^2-C_{14}^1-C_{34}^3+C_{45}^5=0\\ C_{36}^2+C_{46}^5-C_{14}^2=0\\ C_{35}^4+C_{12}^1-C_{23}^3-C_{25}^5+C_{15}^6=0\\ C_{36}^4-C_{26}^5+C_{12}^2+C_{13}^3+C_{16}^6=0\\ C_{56}^4-C_{26}^3+C_{15}^3=0\\ C_{16}^1+C_{36}^3+C_{56}^5-C_{15}^2=0\\ C_{26}^1-C_{25}^2-C_{35}^3+C_{56}^6=0. \end{cases}$$

On conclut alors que toute algèbre de Lie symplectique d'ordre 2, de dimension 6, vérifie le système (S) précédent.

4. Dimension 6 $\quad (n,k)=(3,2)$

$n_1^6:[X_1,X_2]=X_3;[X_1,X_3]=X_6;[X_1,X_6]=X_5;[X_1,X_5]=X_4$

$$n_2^6:\begin{cases}[X_1,X_2]=X_3;[X_1,X_3]=X_6;[X_1,X_6]=X_5;\\ [X_1,X_5]=X_4;[X_2,X_3]=X_4.\end{cases}$$

$$n_3^6:\begin{cases}[X_1,X_2]=X_3;[X_1,X_3]=X_4;[X_1,X_4]=X_5;\\ [X_1,X_5]=X_6;[X_2,X_3]=X_5;[X_2,X_4]=X_6.\end{cases}$$

$$n_4^6:\begin{cases}[X_1,X_3]=X_2;[X_1,X_2]=X_4;[X_1,X_4]=X_6;\\ [X_1,X_6]=X_5;[X_2,X_4]=X_5;[X_3,X_6]=-X_5.\end{cases}$$

$$n_5^6:\begin{cases}[X_1,X_3]=X_2;[X_1,X_2]=X_4;[X_1,X_4]=X_6;\\ [X_1,X_6]=X_5;[X_2,X_4]=X_5;[X_2,X_3]=-X_6;\\ [X_3,X_4]=X_5;[X_3,X_6]=-X_5.\end{cases}$$

$$n_6^6:\begin{cases}[X_1,X_3]=X_2;[X_1,X_2]=X_4;[X_1,X_4]=X_5;\\ [X_3,X_2]=X_6;[X_3,X_6]=X_5.\end{cases}$$

$n_7^6 : \begin{cases} [X_1, X_3] = X_2; [X_1, X_2] = X_4; \\ [X_1, X_4] = X_5; [X_3, X_6] = X_5. \end{cases}$
$n_8^6 : \begin{cases} [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_6; [X_1, X_6] = X_5; \\ [X_2, X_3] = X_6; [X_2, X_4] = X_5. \end{cases}$
$n_9^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 + X_6; [X_1, X_3] = X_4; \\ [X_1, X_4] = X_5; [X_1, X_6] = X_5. \end{cases}$
$n_{10}^6 : \begin{cases} [X_1, X_4] = X_6; [X_1, X_6] = X_3; \\ [X_2, X_4] = X_5; [X_2, X_5] = X_3. \end{cases}$
$n_{11}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_5; [X_1, X_3] = X_6; \\ [X_1, X_6] = X_4; [X_2, X_5] = X_4. \end{cases}$
$n_{12}^6 : [X_1, X_3] = X_6; [X_1, X_6] = X_4; [X_2, X_5] = X_4.$
$n_{13}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; \\ [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_6. \end{cases}$
$n_{14}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; \\ [X_1, X_6] = X_5; [X_2, X_3] = X_6. \end{cases}$
$n_{15}^6 : [X_1, X_2] = X_3 + X_5; [X_1, X_3] = X_4; [X_2, X_5] = X_6.$
$n_{16}^6 : [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_6.$
$n_{17}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_6; [X_1, X_3] = X_4; \\ [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_5. \end{cases}$
$n_{18}^6 : [X_1, X_2] = X_5; [X_1, X_3] = X_6; [X_2, X_4] = X_6.$
$n_{19}^6 : [X_1, X_2] = X_6; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5.$
$n_{20}^6 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_6] = X_5.$
Pour les algèbres de Lie réelles, nous avons $n_1^6, \ldots, n_{20}^6$ et
$n_{21}^6 : \begin{cases} [X_1, X_3] = X_5; [X_1, X_4] = X_6; \\ [X_2, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = -X_6. \end{cases}$
$n_{22}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_5; [X_1, X_4] = X_6; \\ [X_2, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = -X_6. \end{cases}$
$n_{23}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_6; [X_1, X_6] = X_5; \\ [X_2, X_3] = -X_4; [X_3, X_4] = -X_5. \end{cases}$
$n_{24}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_6; [X_1, X_6] = X_4; \\ [X_2, X_3] = X_5; [X_2, X_5] = -X_4. \end{cases}$
On a démontré alors le résultat suivant :

Théorème V.2 *Toute algèbre de Lie nilpotente de dimension* 6 *est une algèbre de Lie symplectique d'ordre* 2.

B. Algèbres de Lie symplectiques d'ordre 3 nilpotentes

C. Classification en dimension $4, (n, k) = (3, 3)$.

$n_1^4 : [X_1, X_4] = X_3; [X_1, X_3] = X_2$ c'est une loi filiforme.

VI. ALGÈBRES DE LIE SYMPLECTIQUES D'ORDRE K, RÉSOLUBLES.

Exemple 1 *Considérons l'algèbre de Lie* $\mathcal{G} = vect\{X_1, X_2, \ldots, X_6\}$ *donnée par :* $[X_1, X_4] = [X_2, X_4] = X_4$.
$\mathcal{H} = vect\{X_4, X_5, X_6\}$,
$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6$.
$(\Omega, \mathcal{H})$ *ainsi défini munit* $\mathcal{G}$ *d'une structure d'algèbre de Lie symplectique d'ordre* 2, *résoluble.*

Exemple 2 *Considérons l'algèbre de Lie* $\mathcal{G} = vect\{X_1, X_2, \ldots, X_7\}$ *donnée par :* $[X_1, X_i] = X_{i+1}, 2 \leq i \leq 6$

$[X_2, X_3] = X_7$
$[X_3, X_4] = -X_7$
$[X_2, X_4] = X_6$
$[X_2, X_3] = X_6 + X_7.$
$\mathcal{H} = vect\{X_7\},$
$\Omega = \omega^7 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 \wedge \omega^5 \wedge \omega^6.$
$(\Omega, \mathcal{H})$ *ainsi définie munit* $\mathcal{G}$ *d'une structure d'algèbre de Lie symplectique d'ordre* 6*, résoluble.*

VII. ALGÈBRES DE LIE SYMPLECTIQUES D'ORDRE K SIMPLES

Exemple 3 $sl\,(2, \mathbb{C}) = \{A = (a_{ij}) \in gl\,(2, \mathbb{C}) \mid Tr\,(A) = 0\}$ *l'algèbre linéaire spéciale complexe*

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}$ *où* $a, b, c \in \mathbb{C}$

$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A = aX_1 + bX_2 + cX_3.$
$\dim sl\,(2, \mathbb{C}) = 3$
$sl\,(2, \mathbb{C}) = Vect\,\{X_1, X_2, X_3\}$*,dans ce cas* $n = k = 2$
$\Omega = \omega^{12} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$ *(On posant* $(12) = 3$*)*
$sl\,(2, \mathbb{C})$ *est une algèbre de Lie symplectique d'ordre* 2*,complexe simple.*

VIII. REFERENCES

[1] A. AWANE - M. GOZE. *Pfaffian systems, k-symplectic systems.* Kluwer Academic Publishers. Dordreicht,boston, London 2000.

[2] A. MEDINA Structures de poisson affines. Colloque international Aix-en-Provence (1990).

[3] M. GOZE - Y. KHAKIMDJANOV Nilpotent Lie Algebras. Kluwer Academic Publishers. Dordreicht, boston, London 1996.

[4] A. AWANE - M. BELAM - S. FIKRI - M. LAHMOUZ - B. NAANANI. Structures symplectiques d'ordre supérieur.Soumis.

[5] Vergne M. Variétés des algèbres de Lie nilpotentes.
Thèse de 3ème cycle, Paris, 1966.