



## Application du Groupe de Renormalisation aux Equations de Réaction-Diffusion

M. Benhamou<sup>1</sup>, L. Maklouf<sup>1</sup>, L. El Bermi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Lab. Physique des Polymères et Phénomènes Critiques, Fac Sc Ben M'sik, Casablanca, Maroc.*

<sup>2</sup> *Département d'Informatique, Faculté des Sciences et Techniques, Errachidia, Maroc.*

### Abstract

Dans cet article de revue, nous présentons d'une manière simple les idées du Groupe de Renormalisation ayant conduit au comportement asymptotique en temps des solutions d'une classe d'équations de réaction-diffusion de type parabolique. Ces idées ont été appliquées, avec grand succès, d'abord en Physique des Particules, ensuite dans le contexte des Phénomènes Critiques. Ce n'est pas un hasard de s'intéresser à ce genre d'équations, car celles-ci gèrent beaucoup de phénomènes naturels, en relation avec la physique, la mécanique des fluides, la thermique, les milieux poreux, les fronts de diffusion, la chimie, la biologie, la botanique et même l'économie.

**Mots clés :** *Equations de réaction-diffusion - Comportement asymptotique en temps - Groupe de Renormalisation dans l'espace réel - Théorie des Champs.*

### I. INTRODUCTION

Les équations de réaction-diffusion sont généralement des équations différentielles aux dérivées partielles de type parabolique (EDPs), c'est-à-dire qu'elles contiennent une dérivée partielle simple par rapport au temps et des dérivées spatiales [1, 2]. Ces équations modélisent toute une classe de systèmes naturels. Parmi ces systèmes, nous pouvons citer le transfert thermique avec absorption, l'écoulement dans un milieu poreux, la pression d'un gaz dans un problème d'ondes de choc, la pression d'un liquide dans un milieu poreux, la croissance d'une interface, les phénomènes de réaction-diffusion ou le front de diffusion.

Les EDPs sont des équations très souvent non linéaires, et c'est rare qu'on réussit à les résoudre d'une manière analytique. Lorsque la solution analytique existe, elle peut être obtenue par transformation de l'équation originale en une équation linéaire (donc facile à résoudre). On utilise également les techniques des algèbres de Lie [3-6], si cette équation possède une certaine symétrie. Parmi les problèmes d'intérêt, on s'intéresse à la stabilité de la solution des EDPs, ainsi qu'à leur comportement asymptotique. La méthode la plus sophistiquée pour étudier le comportement asymptotique en temps est la technique du Groupe de Renormalisation (RG). Dans le passé, cette même approche a été appliquée avec grand succès d'abord en Physique des Particules [7, 8], ensuite en Phénomènes Critiques [9-11]. Pour le premier domaine, le GR a été très utile pour étudier le comportement infrarouge ainsi que la liberté asymptotique. Pour le second, le GR a été introduit dans une série de brillants papiers par K. Wilson [12, 13], pour extraire le comportement critique

des systèmes présentant une transition du second ordre.

Il y a quelques années, on s'est avéré que le GR pouvait s'appliquer également pour extraire le comportement asymptotique en temps des EDPs [14 – 22]. L'hypothèse fondamentale est que la solution se comporte asymptotiquement comme :  $t^{-\alpha/2} f(x/\sqrt{t})$ , où l'exposant  $\alpha$  et la fonction d'échelle  $f(x)$  dépendent généralement de la nature du problème. Ici,  $x$  est la variable spatiale et  $t$  le temps. Donc, la recherche du comportement asymptotique nécessite la connaissance de ces deux quantités. Pour ce faire, on construit d'abord une transformation de renormalisation. Le point fixe de cette transformation n'est rien d'autre que la fonction d'échelle  $f(x)$ . Très récemment, on a aussi utilisé la Théorie de Champ pour étudier ce comportement asymptotique [23].

Cet article s'organise comme suit. En Sec. 2, nous rappelons l'obtention des équations de réaction-diffusion les plus générales. Ensuite, en Sec. 3, nous jugeons utile de situer la théorie de la renormalisation dans son contexte historique. La notion importante de la self-similarité est rappelée en Sec. 4. L'application du GR dans l'espace réel pour la recherche du comportement asymptotique est l'objectif de la Sec. 5. L'application de la Théorie de Champ est présentée en Sec. 6. Enfin, nous terminons ce papier par des remarques finales.

## II. EQUATIONS DE RÉACTION-DIFFUSION

Le mécanisme de diffusion modélise le mouvement des individus dans un environnement ou un milieu. Ces individus peuvent être petits, tels que des particules en physique, bactéries, molécules ou cellules, ou encore des objets très larges comme des êtres humains, animaux, insectes, organismes, plantes, ou certains types d'évènements comme des épidémies ou de rumeurs.

Supposons que les individus résident dans une région,  $\Omega$ , qui est un domaine ouvert de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$ , avec  $n \geq 1$ . En particulier, nous serons intéressés par les cas  $n = 1, 2$  et  $3$ . Mais le formalisme présenté ici s'applique à toute dimension de l'espace.

La variable mathématique de base que nous considérons ici est la fonction densité de population :  $P(x, t)$ , où  $x \in \Omega$  est la position et  $t$  le temps. La dimension de la densité de populations est le nombre de particules par unité de longueur (pour  $n = 1$ ), unité d'aire (pour  $n = 2$ ) ou par unité de volume (pour  $n = 3$ ). Par exemple, la densité de population humaine est souvent exprimée en nombre d'individus par kilomètre carré.

La densité de population est toujours associée à une échelle, comme le pays, la ville, la cité ou la rue. Mais comme pour d'autres modèles mathématiques, nous supposerons que la fonction  $P(x, t)$  a les bonnes propriétés mathématiques, comme la continuité et la dérivabilité. Ce qui est, en fait, raisonnable, lorsqu'on considère une population avec un grand nombre d'individus.

Techniquement, l'on définit la fonction densité de population  $P(x, t)$  comme suit : soit  $x$  un point de l'habitat  $\Omega$ , et soit  $\{O_n \subset \Omega\}_{n=1}^{\infty}$  une séquence de régions spatiales (qui ont la même dimension que  $\Omega$ ) entourant le point  $x$ . Ici, les sous-domaines  $\{O_n\}$  sont choisis, de sorte que leurs mesures spatiales  $\{|O_n|\}$  (longueur, aire, volume, ou mathématiquement, la mesure de Lebesgue) tendent vers zéro, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , et  $O_n \supset O_{n+1}$  ; alors

$$P(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Nombre d'individus dans } O_n \text{ au temps } t}{|O_n|}, \quad (\text{II.1})$$

si la limite existe. Réellement, tant que l'échelle de collection des données est suffisamment petite, la densité de population est toujours très bien définie. Il est clair que la population totale dans n'importe quelle région  $O$  de  $\Omega$ , au temps  $t$ , est

$$\int_{\Omega} P(x, t) dx. \quad (\text{II.2})$$

La question à laquelle nous sommes intéressés, maintenant, est comment la fonction  $P(x, t)$  change, lorsque  $t$  évolue et la position  $x$  varie. La population peut changer de deux manières : une est que les particules individuelles peuvent bouger dans leur domaine ; et la deuxième est qu'elles peuvent donner naissance à de nouveaux individus, ou tuer les individus existants, pour des raisons physique, chimique ou biologique. Nous modéliserons ces deux différents phénomènes séparément. Comment les particules peuvent bouger ? En général, ceci est un processus hautement compliqué, qui peut être attribuer à plusieurs raisons. Par exemple, les raisons d'immigration humaine peuvent

être pour chercher une vie descendante, chercher un travail meilleur, ou pour une raison politique ou une raison religieuse. Généralement, la population se déplace des régions où la densité de population est la plus grande à des régions où cette densité est la plus faible. Cela est similaire à plusieurs phénomènes physiques, comme le transfert de chaleur (de l'endroit le plus chaud à l'endroit le plus froid), ou une dilution chimique dans l'eau. Ceci nous fait rappeler le proverbe chinois qui est que "le peuple monte vers le haut et l'eau coule vers le bas".

Le mouvement de  $P(x, t)$  est appelé "flux de la densité de population", qui est un vecteur. Le principe du "haut vers le bas" signifie que le flux pointe dans la direction de la décroissance rapide de  $P(x, t)$ , qui est le gradient négatif de  $P(x, t)$ . Ce principe est appelé "loi de Fick", qui se traduit mathématiquement par

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = -D(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}, t) , \quad (\text{II.3})$$

où  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$  est le flux de  $P(x, t)$ ,  $D(x)$  le coefficient de diffusion au point  $x$ , et  $\nabla_x$  l'opérateur gradient :  $\nabla_x f(x) = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$ .

D'un autre côté, le nombre d'individus en n'importe quel point peut changer, à cause d'autres raisons, comme la naissance, la mort, la chasse, ou les réactions chimiques. L'on suppose que le taux de changement de la fonction densité dû à ces raisons est  $f(x, t; P)$ , appelé "taux de réaction". Maintenant, le but est d'obtenir une équation différentielle satisfaite par la densité de population, en utilisant la "loi de balance". L'on choisit une région arbitraire  $O \subset \Omega$ , alors la population dans  $O$  est  $\int_O P(x, t) dx$ , et le taux de changement de la population totale est

$$\frac{d}{dt} \int_O P(x, t) dx . \quad (\text{II.4})$$

La croissance nette de la population dans le domaine  $O$  est

$$\int_O f(x, t; P(x, t)) dx , \quad (\text{II.5})$$

et le flux total est

$$\int_{\partial O} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{S} , \quad (\text{II.6})$$

où  $\partial O$  est le bord de  $O$ , et  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  la direction normale extérieure au point  $x$ . Alors, la loi de balance implique

$$\frac{d}{dt} \int_O P(x, t) dx = - \int_{\partial O} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{S} + \int_O f(\mathbf{x}, t; P(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} . \quad (\text{II.7})$$

Du théorème de la divergence, l'on a

$$\int_{\partial O} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{S} = \int_O \text{div} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} . \quad (\text{II.8})$$

En combinant (3), (7) et (8), et en interchangeant l'ordre d'intégration et de dérivation, l'on obtient

$$\int_O \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} dx = \int_O \{ \text{div} [D(x) \nabla_x P(x, t)] + f(x, t; P(x, t)) \} dx . \quad (\text{II.9})$$

Puisque le choix de la région  $O$  est arbitraire, alors l'on a l'équation différentielle

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \text{div} [D(x) \nabla_x P(x, t)] + f(x, t; P(x, t)) , \quad (\text{II.10})$$

en tout point  $x$  et à chaque instant  $t$ . L'équation (10) est appelée "équation de réaction-diffusion". Ici,  $\text{div} [D(x) \nabla_x P(x, t)]$  est le terme de diffusion gouvernant le mouvement des individus, et  $f(x, t; P(x, t))$  le terme de réaction qui décrit la naissance/mort ou la réaction se produisant à l'intérieur de l'habitat ou du réacteur.

Le coefficient de diffusion  $D(x)$  n'est pas constant, en général, puisque l'environnement est d'habitude hétérogène. Mais lorsque la région de diffusion est approximativement homogène, l'on peut supposer que  $D(x) = D$ , alors l'équation (10) devient

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \Delta P(x, t) + f(x, t; P(x, t)) , \quad (\text{II.11})$$

où  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$  est l'opérateur Laplacien.

### III. BREF APERÇU SUR LA THÉORIE DE LA RENORMALISATION

La renormalisation est un vieux concept, qui apparaît d'abord en physique élémentaire. Ainsi, pour le vide, la constante diélectrique est  $\epsilon_0$ , mais pour un milieu diélectrique (verres, matières plastiques...), cette constante est plutôt  $\epsilon = \epsilon_0 \times \epsilon_r$ , où  $\epsilon_r$  est la permittivité du vide. Il s'agit alors d'une renormalisation multiplicative de la constante diélectrique. Dans un solide, les électrons libres qui assurent la conduction électrique, interagissent avec la structure cristalline sous-jacente. Pour simplifier l'étude, on peut ignorer la masse réelle  $m$  des électrons, à condition de la remplacer par une masse effective  $m^* = m \times \hat{m}$ , où le facteur  $\hat{m}$  porte les traces des interactions structure cristalline-électrons.

Réellement, la renormalisation apparaît en Théorie Quantique de Champ [7 – 11]. Cette théorie est construite à l'aide d'une action  $S[\varphi]$ , qui est une fonctionnelle du champ  $\varphi$ , et fonction de paramètres microscopiques, à savoir la masse des particules  $m$  et la constante de couplage  $g$ . Bien-entendu, selon le processus de diffusion mis en jeu, on peut avoir plusieurs champs (donc plusieurs masses). Mathématiquement parlant, un champ  $\varphi(x^0, \vec{x})$  est une distribution tempérée. Ici,  $x^\mu = (x^0 = ct, \vec{x})$  est un 4-vecteur, où  $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$  est le 3-vecteur,  $t$  la variable temps et  $c = 3 \times 10^8$  m/s la vitesse de la lumière dans le vide. Les 4-vecteurs sous-tendent l'espace-temps de Minkowski  $\mathbf{M}_4$  (variété différentiable de dimension 4).

Pour la théorie  $\varphi^4$ , par exemple, l'action est la somme

$$S[\varphi] = S_0[\varphi, m^2] + S_{int}[\varphi, g] , \tag{III.1}$$

$$S_0[\varphi, m^2] = \frac{1}{2} \int d^d x [(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + m^2 \varphi^2](x) , \tag{III.2}$$

$$S_{int}[\varphi, g] = \frac{g}{4!} \int d^d x \varphi^4(x) . \tag{III.3}$$

Ici,  $S_0[\varphi, m^2]$  est l'action libre, quadratique dans le champ  $\varphi$  et ses dérivées, et  $S_{int}[\varphi, g]$  l'action interaction, non linéaire dans ce même champ.

La théorie a été développée à l'aide des fonctions de Green,  $G^{(N)}(x_1, \dots, x_N, m^2, g)$ , qui sont la moyenne vide-vide d'un produit du champ  $\varphi$

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N, m^2, g) = \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) | 0 \rangle , \quad x_i \in \mathbf{M}_d , \tag{III.4}$$

où  $T$  est l'opération *ordre chronologique*. Grâce à ces fonctions, on calcule une quantité de base, qui est la matrice  $S$  permettant de déduire la section efficace qu'on mesure expérimentalement [7, 8]. Tout ce qu'on sait faire est de développer ces fonctions en série de puissances de la constante de couplage  $g$ . Le prix à payer est l'apparition des divergences à courtes distances, ou encore divergences *ultraviolettes*. Pour donner un sens à la théorie, on doit d'abord la régulariser. Il existe plusieurs façons de régulariser, mais la plus commode est la régularisation dimensionnelle [24-26], dont le régulateur est  $\epsilon = 4 - d$ , où  $d$  est la dimensionalité de l'espace. Dans le cadre de cette régularisation, les divergences à courtes distances sont des pôles en  $\epsilon$ . Donc, les fonctions de Green régularisées ou "nues" se présentent comme des séries de Laurent dans la variable  $\epsilon$  et des séries entières dans la constante de couplage nue  $g$ .

Il ne suffit pas de régulariser la théorie, il faut la renormaliser. Il a fallu plus d'une quinzaine d'années pour qu'une myriade de grands théoriciens démontrent que la Théorie de Champ est renormalisable, à tous les ordres de la série de perturbation [7, 8]. Ce théorème stipule qu'il existe une masse carrée renormalisée  $m_R^2$ , une constante de couplage renormalisée  $g_R$  et un facteur de renormalisation  $Z$ , fonctions des paramètres *nus* ( $m^2, g$ ) et du régulateur  $\epsilon$ , tels que la fonction de Green nue  $G^{(N)}$  est directement proportionnelle à la fonction de Green renormalisée  $G_R^{(N)}$

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N, m^2, g, \epsilon) = Z^{N/2}(m^2, g, \epsilon) G_R^{(N)}(x_1, \dots, x_N, m_R^2, g_R, \epsilon) , \tag{III.5}$$

$$\varphi = Z^{1/2} \varphi_R . \tag{III.6}$$

La fonction  $G_R^{(N)}$  est finie lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , à paramètres renormalisés  $m_R^2$  et  $g_R$  fixés. Donc, une partie des divergences a été absorbée en redéfinissant les paramètres nus, et la partie divergente restante a été factorisée (facteur  $Z^{N/2}$ ). On peut dire qu'une renormalisation est un *changement* de paramètres.

De la propriété de la renormalisation multiplicative (16), on déduit l'équation du GR, ou encore équation de Callan-Symanzik [7, 8], satisfaite par la fonction de Green renormalisée. La résolution de cette équation renseigne sur le comportement *infrarouge* (ou à grandes distances) des fonctions de Green, c'est-à-dire lorsque  $m^2 \rightarrow 0$ .

Par la suite, K. Wilson, un physicien issu de la Physique des Particules, avait étendu les idées du GR à un autre domaine très différent, qui est celui des Phénomènes Critiques [9 – 11]. Dans ce cas, le paramètre d'ordre joue le rôle du champ  $\varphi$ , l'écart à la température critique  $t = T - T_c$ , le rôle de la masse carrée  $m^2$ , et les fonctions de corrélation sont l'analogie des fonctions de Green  $G^{(N)}$ . Ici,  $T_c$  est la température critique. Donc, l'approche de la transition ( $T \rightarrow T_c$ ), pour les Phénomènes Critiques, correspond à la limite infrarouge  $m^2 \rightarrow 0$ , pour la Théorie Quantique de Champ.

Pour les EDPs qui nous intéressent ici, ces diverses limites sont l'analogie de la limite asymptotique  $t \rightarrow \infty$  de la solution.

#### IV. NOTION DE SELF-SIMILARITÉ

Nous considérons une propriété quelconque  $u(x_1, \dots, x_n, t)$ , qui dépend du point  $(x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbf{R}^{n+1}$ . Pour les systèmes dynamiques,  $t$  est le temps et  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les degrés de liberté. Pour les matériaux magnétiques,  $t$  est l'écart à la température critique  $T_c$  et  $x_1$  le champ magnétique  $H$ .

L'on suppose qu'il existe un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ , tel que la restriction de la propriété  $u$  à  $\mathcal{D}$ , notée  $u^* = u|_{\mathcal{D}}$ , satisfait la propriété d'homogénéité *généralisée* (d'invariance d'échelle ou de self-similarité)

$$u^*(L^{a_1}x_1, \dots, L^{a_n}x_n, L^a t) = L^p u^*(x_1, \dots, x_n, t) . \quad (\text{IV.1})$$

Ici, l'échelle de dilatation  $L$  est un nombre réel arbitraire, et  $p$  le degré d'homogénéité. Les exposants  $(a_1, \dots, a_n, a)$  sont des nombres réels. Cette définition est équivalente à la formule d'Euler

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a t \frac{\partial}{\partial t} - p \right) u^*(x_1, \dots, x_n, t) = 0 . \quad (\text{IV.2})$$

Réécrivons la relation (18) sous la forme

$$u^*(x_1, \dots, x_n, t) = L^{-p} u^*(L^{a_1}x_1, \dots, L^{a_n}x_n, L^a t) . \quad (\text{IV.3})$$

Bien évidemment, le second membre de cette égalité ne doit pas dépendre de l'échelle  $L$ . Nous décidons donc de choisir cette échelle, de telle sorte que  $L^a t = 1$  ou encore  $L = t^{-1/a}$ . Avec ce choix, la relation (20) devient

$$u^*(x_1, \dots, x_n, t) = t^{p/a} f^*(x_1 t^{-a_1/a}, \dots, x_n t^{-a_n/a}) , \quad (\text{IV.4})$$

avec la notation

$$f^*(x_1 t^{-a_1/a}, \dots, x_n t^{-a_n/a}) = u^*(x_1 t^{-a_1/a}, \dots, x_n t^{-a_n/a}, 1) .$$

Il est facile de vérifier que la fonction  $f^*$  est une fonction invariante d'échelle, appelée *fonction d'échelle*. Il en ressort que la solution de l'équation fonctionnelle (20) est

$$u^*(x_1, \dots, x_n, t) = t^{-\alpha/2} f^*(x_1 t^{-\Delta_1}, \dots, x_n t^{-\Delta_n}) , \quad (\text{IV.5})$$

avec l'exposant *principal*

$$\alpha = -\frac{2p}{a} , \quad (\text{IV.6})$$

et les exposants de *crossover*

$$\Delta_i = \frac{a_i}{a}, \quad (1 \leq i \leq n). \quad (\text{IV.7})$$

Pour les systèmes dynamiques, la relation de self-similarité (22) constitue le comportement asymptotique en temps. Donc, la connaissance de ce comportement nécessite la connaissance des exposants  $\alpha$  et  $\Delta_i$  et de la fonction d'échelle  $f^*$ . L'universalité, quand elle est présente, signifie que  $\alpha$  et  $\Delta_i$  ainsi que  $f^*$  sont indépendants des détails du problème, c'est-à-dire les mêmes pour toute une classe de phénomènes de nature différente.

## V. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE PAR LE GR DANS L'ESPACE RÉEL

Soit l'équation différentielle parabolique suivante, satisfaite par la variable dynamique  $u(x, t)$ ,

$$\partial_t u = \partial^2 u + F(u, \partial u, \partial \partial u), \quad (d = 1). \quad (\text{V.1})$$

Nous considérons ici le problème à une dimension ( $d = 1$ ), mais l'analyse que nous présentons ici s'étend à toute autre dimension  $d$  de l'espace. Dans l'équation précédente,  $\partial^2$  représente le Laplacien, et la "réaction"  $F$  est une fonction non linéaire de la solution  $u$  et de ses dérivées premières et secondes  $\partial u$  et  $\partial \partial u$ .

### A. Cas $F = 0$

Dans cette situation, la solution est triviale et est donnée par la Gaussienne

$$u_0(x, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/4t}. \quad (\text{V.2})$$

Cette solution est exactement self-similaire, c'est-à-dire

$$u_0(Lx, L^2t) = L^{-1}u_0(x, t). \quad (\text{V.3})$$

Ceci correspond aux quantités

$$a_1 = 1, \quad a = 2, \quad p = -1, \quad \Delta = \frac{a_1}{a} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = -\frac{2p}{a} = 1. \quad (\text{V.4})$$

La solution (26) s'écrit donc sous la forme d'échelle

$$u_0(x, t) = t^{-1/2} f_0^*(xt^{-1/2}), \quad (\text{V.5})$$

$$f_0^*(y) = (4\pi)^{-1/2} e^{-y^2}. \quad (\text{V.6})$$

### B. Cas $F \neq 0$

Généralement, dans ce cas, la solution asymptotique ne peut être déterminée d'une manière exacte. Nous supposons que, lorsque  $t \rightarrow \infty$ , la solution de l'équation (25) est de la forme

$$u(x, t) \sim t^{-\alpha/2} f^*(xt^{-1/2}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (\text{V.7})$$

Donc, asymptotiquement, la solution  $u(x, t)$  a la propriété d'invariance d'échelle

$$u(Lx, L^2t) \sim L^{-\alpha} u(x, t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (\text{V.8})$$

Le but est alors la recherche de cette solution asymptotique par application du GR dans l'espace réel. C'est précisément l'objectif du sous-paragraphe suivant.

**C. Transformations de renormalisation**

Introduisons la fonction

$$u_L(x, t) = L^\alpha u(Lx, L^2t) \quad , \quad (V.9)$$

qui est, au facteur multiplicatif  $L^\alpha$  près, la solution à l'échelle  $L$ . Il est facile de voir que

$$u_L(x, t) \rightarrow t^{-\alpha/2} f^*(xt^{-1/2}) \quad , \quad L \rightarrow \infty \quad , \quad (V.10)$$

et que  $u_L$  est solution de l'équation différentielle parabolique

$$\partial_t u_L = \partial^2 u_L + F_L(u_L, \partial u_L, \partial \partial u_L) \quad , \quad (V.11)$$

avec

$$F_L(u_L, \partial u_L, \partial \partial u_L) = L^{2+\alpha} F(L^{-\alpha} u_L, L^{-1-\alpha} \partial u_L, L^{-2-\alpha} \partial \partial u_L) \quad (V.12)$$

la non-linéarité à l'échelle  $L$ .

Nous partons d'un *data* initial :  $f(x) = u(x, 1)$ . C'est la solution à l'instant initial  $t = 1$ . L'ensemble de tous les *data* initiaux,  $\mathcal{S}$ , est un espace de Banach. Par définition [15 – 17], une transformation de normalisation (TR), est l'application  $\mathcal{R}_L : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ , telle que

$$(\mathcal{R}_L \{ \}) (x) = u_L(x, 1) = L^\alpha u(Lx, L^2) \quad . \quad (V.13)$$

La TR dépend donc de l'échelle  $L$  et de la forme de la non-linéarité  $F$ .

Il est facile de se convaincre que la TR satisfait la propriété de semi-groupe

$$\mathcal{R}_L \mathcal{R}_{L'} = \mathcal{R}_{LL'} \quad . \quad (V.14)$$

Le GR est alors l'ensemble de toutes les TR possibles  $\mathcal{R}_L$ , avec  $L > 1$ . Si l'on effectue  $n$  fois une TR d'échelle  $L$ , alors l'on obtient

$$u(x, t) \sim L^{n\alpha} u(L^n x, L^{2n} t) \quad , \quad L \rightarrow \infty \quad . \quad (V.15)$$

Soit, en tenant compte de la définition de la TR (27),

$$u(x, t) \sim t^{-\alpha/2} (\mathcal{R}_L \{ \}) (xt^{-1/2}) \quad \leftrightarrow \quad u(x, t) \sim t^{-\alpha/2} f^*(xt^{-1/2}) \quad , \quad (V.16)$$

Ce résultat doit être comparé à la forme asymptotique (21). L'on trouve alors

$$\mathcal{R}_L \{ \} \rightarrow \{ * \quad , \quad L \rightarrow \infty \quad . \quad (V.17)$$

La fonction d'échelle  $f^*$  constitue alors un *point fixe* de la TR. Dans cette limite, la non-linéarité  $F_L$ , à l'échelle  $L$ , tend vers la valeur fixe  $F^*$ . Donc, il est suffisant pour obtenir la solution asymptotique  $u^*$  de remplacer dans l'équation différentielle parabolique initiale la non-linéarité  $F$  par  $F^*$ . L'on écrit alors  $F = F^* + \delta F$ , où la déformation  $\delta F$  renseigne sur le comportement sous-dominant.

L'universalité, si elle se présente, signifie l'indépendance de l'exposant  $\alpha$  et de  $f^*$  du *data* initial et de la nature du problème.

L'étape suivante consiste à donner le critère de relevance quant à la recherche du comportement asymptotique. Pour cela, nous commençons par rappeler le point fixe Gaussien.

**D. Point fixe Gaussien**

En l'absence de toute réaction ( $F = 0$ ), la solution est définie par la relation (26). Le *data* initial et la TR correspondants sont respectivement donnés par

$$f_0(x) = u_0(x, 1) = (4\pi)^{-1/2} e^{-x^2/4} = f_0^*(x) \quad , \quad (V.18)$$

$$(\mathcal{R}_L \{ \}) (x) = u_L(x, 1) = L u_0(Lx, L^2) = f_0(x) \quad , \quad (\alpha = 1) \quad . \quad (V.19)$$

Alors, la TR  $\mathcal{R}_L$  est *exacte* et possède une ligne de points fixes, à savoir les multiples de  $f_0^*(x)$ , avec

$$f_0^*(x) = (4\pi)^{-1/2} e^{-x^2/4} \quad . \quad (V.20)$$

### E. Critère de relevance

Nous partons d'une non-linéarité générale, qui est une fonction de  $\mathbf{C}^3$  dans  $\mathbf{C}$  (corps des nombres complexes). Nous supposons que cette fonction est analytique au voisinage de l'origine  $(0, 0, 0)$ . Raisons sur un monôme donné  $F(u, \partial u, \partial^2 u) = u^n (\partial u)^m (\partial^2 u)^p$ . Après transformation d'échelle, l'on obtient

$$F \rightarrow F_L = L^{-d_F} F, \quad (\text{V.21})$$

avec l'exposant

$$d_F = n + 2m + 3p - 3. \quad (\text{V.22})$$

L'analyse dépend donc du signe de cette exposant, et l'on a le critère

$$d_F > 0, \quad \text{Monôme irrelevant}, \quad (\text{V.23})$$

$$d_F = 0, \quad \text{Monôme marginal}, \quad (\text{V.24})$$

$$d_F < 0, \quad \text{Monôme relevant}. \quad (\text{V.25})$$

#### 1. Exemple 1: Equation de la chaleur avec absorption

L'équation différentielle associée est [15 – 17]

$$\partial_t u = \partial^2 u - u^p, \quad (\text{V.26})$$

et l'exposant correspondant est :  $d_F = p - 3$ . Donc, l'on a le critère

$$p > 3, \quad \text{Monôme irrelevant}, \quad (\text{V.27})$$

$$p = 3, \quad \text{Monôme marginal}, \quad (\text{V.28})$$

$$p < 3, \quad \text{Monôme relevant}. \quad (\text{V.29})$$

Il faut signaler que la solution générale de l'équation (40) est exactement self-similaire

$$u(x, t) = t^{-1/(p-1)} f^* \left( xt^{-1/2} \right), \quad \left( \alpha = \frac{1}{p-1} \right), \quad (\text{V.30})$$

où le point fixe non trivial  $f^*$  est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$f'' + \frac{1}{2} x f' + \frac{f}{p-1} - f^p = 0. \quad (\text{V.31})$$

On a montré qu'asymptotiquement [15-17]

$$f^*(x) \sim |x|^{-2/(p-1)}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{V.32})$$

#### 2. Exemple 2 : Equation de Burgers

Cette équation est telle que

$$\partial_t u = \partial^2 u + (\partial_x u)^2, \quad d_F = 1. \quad (\text{V.33})$$

La non-linéarité  $(\partial_x u)^2$  est alors irrelevante. Bien que cette équation soit non linéaire, elle possède, néanmoins, la solution exacte [15-17]

$$u(x, t) = At^{-1/2} f^* \left( xt^{-1/2} \right), \quad f^*(x) = \frac{Ae'(x)}{1 + Ae(x)}, \quad (\text{V.34})$$

où  $A$  est une amplitude connue, et  $e(x)$  la fonction *erreur*. Le point fixe  $f^*(x)$  est alors non trivial, puisqu'il est différent du point fixe Gaussien.

## VI. SOLUTION ASYMPTOTIQUE PAR LA THÉORIE DE CHAMP

Notre point de départ est l'équation différentielle parabolique

$$\partial_t \varphi = \nu_0 \partial^2 \varphi + V(\varphi, \partial \varphi, \partial \partial \varphi) , \quad (\text{VI.1})$$

où la variable dynamique  $\varphi(x, t)$  est un champ scalaire. Ici,  $\nu_0$  est le coefficient de diffusion, et  $V$  une fonction non linéaire de ses variables. L'équation différentielle précédente doit être complétée par la condition au limite

$$\varphi(x, 0) = \delta_d(x - x_0) . \quad (\text{VI.2})$$

Nous posons  $G(x, t | x_0, 0) = \varphi(x, t)$ . Cette fonction peut s'écrire comme la double intégrale fonctionnelle [26]

$$G(x, t | x_0, 0) = \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} \varphi(\xi, \sqcup) ]^{-S[\varphi, \tilde{\varphi}] + \tilde{\varphi}(\xi_t)} , \quad (\text{VI.3})$$

avec l'action

$$S[\varphi, \tilde{\varphi}] = \int dx \int dt \tilde{\varphi} [\partial_t \varphi - \nu_0 \partial^2 \varphi + V(\varphi, \partial \varphi, \partial \partial \varphi)] . \quad (\text{VI.4})$$

Nous supposons, par la suite, que la non-linéarité  $V$  est de la forme

$$V(\varphi, \partial \varphi, \partial \partial \varphi) = \nu_0 \sum_{m, n, p} g_{mnp} \varphi^m (\partial \varphi)^n (\partial \partial \varphi)^p , \quad (\text{VI.5})$$

où les coefficients de la série  $g_{mnp}$  représentent les constantes de couplage.

Pour sélectionner les monômes relevants de la série précédente, nous allons raisonner en utilisant un comptage naïf de puissances.

### A. Comptage de puissances

D'entrée de jeu, nous introduisons les dimensions en distance et en temps d'une quantité quelconque  $X$

$$[X] = L^{x_F} T^{y_F} , \quad (\text{VI.6})$$

où  $L$  et  $T$  sont respectivement des échelles de longueur et de temps. Ainsi, l'on a

$$[\nu_0] = L^2 T^{-1} , \quad [\tilde{\varphi}] = L^0 T^0 , \quad [\varphi] = L^{-d} T^0 , \quad (\text{VI.7})$$

$$[V] = L^{-d} T^{-1} , \quad [g_{mnp}] = L^{x_g} T^0 , \quad (\text{VI.8})$$

avec

$$x_g = n + 2p - 2 + d(m + n + p - 1) . \quad (\text{VI.9})$$

La dimension  $x_g$  suggère que les constantes de couplage effectives sont plutôt

$$\tilde{g}_{mnp} = \frac{g_{mnp}}{L^{x_g}} . \quad (\text{VI.10})$$

D'où le critère de relevance

$$x_g > 0 , \quad g_{mnp} \text{ est irrelevante} , \quad (\text{VI.11})$$

$$x_g = 0 , \quad g_{mnp} \text{ est marginale ,} \quad (\text{VI.12})$$

$$x_g < 0 , \quad g_{mnp} \text{ est relevante .} \quad (\text{VI.13})$$

Notons que, pour  $d = 1$ , l'on retrouve le critère de relevance présenté au paragraphe précédent. Pour un monôme donné, c'est-à-dire à  $(m, n, p)$  fixés, le raisonnement peut se faire en terme de la dimension de l'espace  $d$ . Pour cela, nous écrivons  $x_g$  sous la forme

$$x_g = (m + n + p - 1) (d - d_c) , \quad (\text{VI.14})$$

où

$$d_c = \frac{2 - n - 2p}{m + n + p - 1} \quad (\text{VI.15})$$

est la *dimension critique*. Alors, l'on a le critère

$$d < d_c , \quad g_{mnp} \text{ est relevante ,} \quad (\text{VI.16})$$

$$d = d_c , \quad g_{mnp} \text{ est marginale ,} \quad (\text{VI.17})$$

$$d > d_c , \quad g_{mnp} \text{ est irrelevante .} \quad (\text{VI.18})$$

Ainsi, pour les non-linéarités  $V = \nu_0 g \varphi^m$  et  $V = \nu_0 g \varphi \partial \varphi$ , les dimensions critiques respectives sont  $d_c = 2/(m - 1)$  et  $d_c = 1$ .

## B. Application de la Théorie de Champ

L'espace ne me permet pas d'entrer ici dans les détails concernant l'applicabilité de la Théorie de Champ à l'étude du comportement asymptotique, nous allons simplement dessiner la stratégie :

1. Faire un développement perturbatif par rapport aux constantes de couplage  $\{g\}$ , et il apparaît des divergences à courtes distances (pôles en  $\epsilon = d_c - d$ ) ;
2. Renormaliser la théorie, c'est-à-dire écrire :  $G(\{g\}, \epsilon) = Z(\{g\}, \epsilon) \times G_R(\{g_R\}, \epsilon)$  ;
3. Ecrire, ensuite, l'équation du GR satisfaite par  $G_R$  ;
4. Sa solution est alors le comportement asymptotique.

Pour la non-linéarité  $V = \nu_0 g \varphi^m$ , par exemple, on montre que la solution est exactement self-similaire [26]

$$\varphi(x, t) \sim (\nu_0 t)^{-1/(m-1)} f^*(x/\sqrt{\nu_0 t}) . \quad (\text{VI.19})$$

## VII. REMARQUES FINALES

Dans cet article de revue, nous avons exposé l'application des techniques de la renormalisation, à la recherche du comportement asymptotique en temps des équations différentielles aux dérivées partielles paraboliques.

Nous affirmons que ces mêmes techniques pourraient s'appliquer à des équations différentielles couplées, c'est-à-dire qui contiennent plus d'une variable dynamique. C'est le cas, par exemple, du chimiotactisme et du morphogénèse en biologie.

Aussi, certains processus de réaction-diffusion nécessitent l'introduction d'un bruit. Plus exactement, ces équations se présentent sous la forme

$$\partial_t \varphi = \nu_0 \partial^2 \varphi + V(\varphi, \partial \varphi, \partial \partial \varphi) + \eta(x, t) .$$

Ici, le bruit est supposé Gaussien, auquel cas

$$\langle \eta(x, t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \nu_0 \delta(t - t') \delta_d(x - x') .$$

La présente analyse s'étend sans difficulté à ce genre de situations.

Les EDPs avec un temps fractionnaire sont aussi d'intérêt. Ces équations sont pertinentes pour les systèmes où diffusion et réaction se passent dans des milieux aléatoires (ou fractals). Ces équations sont comme suit

$$\frac{\partial^\omega}{\partial t^\omega} u = \nu_0 \partial^2 u + V(u, \partial u, \partial \partial u) , \quad (0 < \omega < 1) .$$

Ici, la dérivée fractionnaire est telle que

$$\frac{\partial^\omega}{\partial t^\omega} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(-\omega)} \int_0^t \frac{u(x, s)}{(t-s)^{\omega+1}} ds ,$$

où  $\Gamma(z)$  est la fonction *gamma* d'Euler.

Enfin, notons que les techniques du GR présentées dans cet article de revue peuvent s'étendre également à quelques équations différentielles de type elliptique [15-17].

### VIII. REFERENCES

- 
- <sup>1</sup> Andrei D. Polyanin, *Handbook of Linear Partial Equations For Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC, 2002.
  - <sup>2</sup> Andrei D. Polyanin, Valentin F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Equations For Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC, 2004.
  - <sup>3</sup> G. Gaeta, *J. Phys. A* **27**, 437 (1994).
  - <sup>4</sup> G. Gaeta, *Nonlinear Symmetries and Nonlinear Equations*, Kluwer, Dordrecht, 1994.
  - <sup>5</sup> P.J. Olver, *Application of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, Berlin 1986.
  - <sup>6</sup> H. Stephani, *Differential Equations. Their Solution Using Symmetries*, Cambridge University Press 1989.
  - <sup>7</sup> N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov, *Introduction to Theory of Quantized Fields*, Interscience, New York, London, 1959.
  - <sup>8</sup> C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980.
  - <sup>9</sup> D. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, McGraw-Hill, New-York, 1978.
  - <sup>10</sup> C. Itzykson, J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory : 1 and 2*, Cambridge University Press, 1989.
  - <sup>11</sup> J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1989.
  - <sup>12</sup> K. Wilson, *Phys. Rev. B* **4**, 3183 (1971).
  - <sup>13</sup> K. Wilson, *Phys. Rev. B* **4**, 31843205 (1971).
  - <sup>14</sup> G.I. Barenblatt, *Scaling, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.
  - <sup>15</sup> J. Bricmont, A. Kupiainen, *Commun. Math. Phys.* **150**, 193 (1992).
  - <sup>16</sup> J. Bricmont, A. Kupiainen, G. Lin, *Commun. Pure Appl. Math.* **47**, 893 (1994).
  - <sup>17</sup> J. Bricmont, A. Kupiainen, *Renormalizing Partial Differential Equations In Constructive Physics*, *Lecture Notes in Physics* **446**, 83115 (1995).
  - <sup>18</sup> L. Chen, N. Goldenfeld, *Phys. Rev.* **51**, 5577 (1995).
  - <sup>19</sup> L. Chen, N. Goldenfeld, Y. Oono, *Phys. Rev. A* **44**, 6544 (1991).
  - <sup>20</sup> N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Reading Addison-Wesley, 1992.
  - <sup>21</sup> N. Goldenfeld, O. Martin, Y. Oono, F. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1361 (1990).
  - <sup>22</sup> N. Goldenfeld, O. Martin, Y. Oono, *Asymptotics of Partial Differential Equations and the Renormalization Group*, Proc. NATO Advanced Research Workshop on Asymptotics Beyond All Orders, S. Tanveer, ed., Plenum, New York, 1992.
  - <sup>23</sup> N.V. Antonov, J. Honkonen, *Phys. Rev. E* **63**, 036302 (2001).
  - <sup>24</sup> G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys. B* **44**, 189 (1972).
  - <sup>25</sup> G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **61**, 455 (1973).
  - <sup>26</sup> J.C. Collins, *Nucl. Phys. B* **80**, 341 (1974).