



Structures k Complexes sur les Algèbres de Lie

A.Awane^{a,*}, M. Bent Bah Cheikhouna^b and E. Remm^c

^a *Université HassanII-Mohammedia. Faculté des Sciences Ben M'sik.*

B.P. 7955. Boulevard Driss Harti. Casablanca. Maroc.

^b *Faculté des Sciences et Techniques. Nouakchott. Mauritanie.*

^c *Laboratoire de Mathématiques et Applications,*

Université de Haute Alsace, 4, rue des Frères Lumière, F-68093

** a.awane@yahoo.fr*

Received 12 November 2006; accepted 7 May 2007 ; available online 2 February 2008

Abstract

In this work, we determine the Lie algebras endowed with bi-invariant k -complex structure and also we give the left invariant k -complex Lie algebras.

Keywords: Structures k -complexes, structures complexes, algèbre de Lie complexe.

MS Classification 2000: 17Bxx, 53Cxx.

I. INTRODUCTION

L'une des principales motivations qui ont conduit à introduire les structures k -symplectiques¹⁻⁷, est de proposer un formalisme géométrique des équations de Nambu-Hamilton

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D(H, G)}{D(y, z)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{D(H, G)}{D(z, x)}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{D(H, G)}{D(x, y)},$$

régissant le mouvement de la mécanique statistique de Nambu en dimension trois, où H et G sont deux fonctions réelles définies sur l'espace de phase M décrit par le système de coordonnées (x, y, z) , et $D(H, G)/D(y, z)$ est le Jacobien

$$\frac{D(H, G)}{D(y, z)} = \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial y}.$$

La structure k -symplectique standard $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$ de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ définie par⁷

$$\begin{cases} \theta^p = \sum_{i=1}^n dx^{pi} \wedge dx^i, (1 \leq p \leq k) \\ E \mid dx^1 = \dots = dx^n = 0 \end{cases}$$

admet des champs d'endomorphismes anti-symétriques J^1, \dots, J^k de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ tels que :

$$\theta^p (X, Y) = \langle J^p X, Y \rangle, (1 \leq p \leq k)$$

\langle, \rangle étant le produit scalaire euclidien. Relativement au système de coordonnées locales $(x^{pi}, x^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$, on a :

$$J^p = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^{pi} - \frac{\partial}{\partial x^{pi}} \otimes dx^i \right).$$

Dans ce travail, les champs de tenseurs J^1, \dots, J^k formeront le support d'une nouvelle structure, appelée presque k -complexe, dont la donnée est équivalent à celle d'une G -structure où G est le sous-groupe de $Gl(n(k+1), \mathbb{R})$ formé par les matrices de la forme:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$$

où $A \in GL(n, \mathbb{R})$.

L'intégrabilité d'une telle G -structure est équivalente à la nullité du tenseur de Bernard-Chern. Cependant la nullité du tenseur de torsion $\{J^p, J^q\}$ de la structure presque k -complexe définissant la G -structure est une condition nécessaire, mais pas suffisante pour l'intégrabilité⁵.

Dans ce travail, qui est consacré aux structures k -complexes d'algèbres de Lie, on détermine les algèbres de Lie munies d'une structure k -complexe bi-invariante et celles munies d'une structure k -complexe invariante à gauche.

II. STRUCTURES K -COMPLEXES SUR UNE ALGÈBRE DE LIE

A. Structures k -complexes sur un espace vectoriel

Soient V un espace vectoriel réel de dimension $n(k+1)$ et J^1, \dots, J^k des endomorphismes de V de rang $2n$. Soit E un sous espace vectoriel de V de codimension n .

Pour tout $p (p = 1, \dots, k)$, on pose :

$$E^p = \bigcap_{q \neq p} \ker J^q.$$

Par convention pour $k = 1$, on prendra $E^1 = E$.

Définition II.1 On dit que $(J^1, \dots, J^k; E)$ définit une structure k -complexe sur V si, pour chaque $(p = 1, \dots, k)$, les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Le système $\{J^1, \dots, J^k\}$ est non dégénéré, c'est-à-dire, $\bigcap_{p=1}^k \ker J^p = \{0\}$,
2. pour tout $p \in \{1, \dots, k\}$, $\ker J^p \subset E$, $J^1(E^1) = \dots = J^k(E^k) = F$, et $J^p(F) = E^p$,
3. pour tout $p \in \{1, \dots, k\}$, $Im J^p = E^p \oplus F$ et la restriction \widehat{J}^p de J^p à $E^p \oplus F$ vérifie

$$(\widehat{J}^p)^2 = -Id_{E^p \oplus F}.$$

Proposition II.1 Si $(J^1, \dots, J^k; E)$ est une structure k -complexe sur V , alors :

1. $\dim F = \dim E^p = n$,
2. $E = E^1 \oplus \dots \oplus E^k$.

Définition II.2 Une structure 1-complexe sur un espace vectoriel réel V de dimension $2n$ est un couple (J, E^1) tel que J soit une structure complexe sur V et E^1 un sous espace vectoriel de V de dimension n tel que $V = E^1 \oplus J(E^1)$.

Remarque II.1 Si $(J^1, \dots, J^k; E)$ est une structure k -complexe sur V , alors $\widehat{J^p}$ définit une structure 1-complexe sur $E^p \oplus F$.

Proposition II.2 Soit J une structure complexe sur un espace vectoriel réel V de dimension $2n$. Alors il existe un sous espace vectoriel E^1 de dimension n de V tel que $V = E^1 \oplus J(E^1)$.

Ainsi nous avons la décomposition vectorielle suivantes :

$$V = E^1 \oplus E^2 \oplus \dots \oplus E^k \oplus F.$$

Définition II.3 Deux structures 1-complexes (J^1, E^1) et $(\tilde{J}^1, \tilde{E}^1)$ sur V sont dites équivalentes s'il existe

$$\varphi : V \rightarrow V$$

isomorphisme tel que

$$\varphi \circ J^1 = \tilde{J}^1 \circ \varphi \text{ et } \varphi(E^1) = \tilde{E}^1$$

B. Structures presque k -complexes

Soit M une variété différentiable de dimension $n(k+1)$.

Définition II.4 On dit qu'une variété M possède une structure presque k -complexe si pour tout point x de M l'espace tangent $T_x M$ possède une structure k -complexe d'espaces vectoriels

$$((J^1)_x, \dots, (J^k)_x; E_x).$$

Bien entendu, on suppose que cette structure dépend de façon C^∞ du point x . Ceci revient à dire que pour tout x_0 de M , il existe un voisinage U_0 de x_0 dans M et une section locale C^∞ du fibré des repères de M notée $(e_{pi}, e_i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$ telle qu'en chaque point x de U_0 nous avons :

1. pour chaque $p = 1, \dots, k$, le sous espace E_x^p est engendré par $(e_{pi}(x))_{1 \leq i \leq n}$ et le sous espace F_x est engendré par $(e_i(x))_{1 \leq i \leq n}$,
2. pour chaque $p, q \in \{1, \dots, k\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $(J_p)_x(e_{qi}(x)) = \delta_{pq}e_i(x)$ et $(J_p)_x(e_i(x)) = -e_{pi}(x)$.

Une telle section locale du fibré des repères de M sera dite adaptée à la structure presque k -complexe de M .

Soit G un groupe de Lie de dimension $n(k+1)$ d'algèbre de Lie \mathcal{G} . Une structure k -complexe sur \mathcal{G} correspond alors à une structure k -complexe invariante à gauche sur G .

C. Structures k -complexes invariantes à gauche sur un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie de dimension $2n$ d'algèbre de Lie \mathcal{G} , muni d'une structure presque 1-complexe (J, E) . On suppose que cette structure est invariante à gauche c'est-à-dire, pour tous $g, x \in G$ on a :

1. $(L_g)_*E_x = E_{gx}$, $(L_g)_*F_x = F_{gx}$;

2. Les sous-fibrés E et F sont intégrables.

Soit \mathfrak{E} et \mathfrak{F} les feuilletages invariants à gauche définis par les sous-fibrés E et F . Les feuilles H et K des feuilletages \mathfrak{E} et \mathfrak{F} passant par l'élément neutre e de G , sont des sous-groupes de Lie connexes de G . Désignons par \mathcal{H} et \mathcal{F} les algèbres de Lie des sous-groupes H et K .

Réciproquement, soient \mathcal{H} et \mathcal{F} des sous-algèbres de Lie de \mathcal{G} . Pour tout $x \in G$ on pose

$$P_x = \{X_x \in T_x G \mid \tilde{\eta}(X_x) \in \mathcal{H}\},$$

$$Q_x = \{X_x \in T_x G \mid \tilde{\eta}(X_x) \in \mathcal{F}\}.$$

$\tilde{\eta}$ étant la 1-forme de Maurer-Cartan de G . Les champs d'éléments de contact P et Q , ainsi construits, définissent bien des sous-fibrés intégrables de TG . Les feuilles H et K des feuilletages \mathfrak{E} et \mathfrak{F} associés aux sous-fibrés P et Q passant par l'élément neutre e de G sont des sous-groupes de Lie connexes de G d'algèbres de Lie \mathcal{H} et \mathcal{F} tels que les orbites de H et K agissant par translations à droite dans G soient les feuilles de \mathfrak{E} et \mathfrak{F} respectivement.

3. On a donc associé aux sous-fibrés E et F des sous-algèbres \mathcal{H} et \mathcal{F} et nous identifions les tenseurs $J(e)$ en l'élément neutre de G avec l'endomorphisme correspondant sur \mathcal{G} , notés également J tels que :

- $\ker J = 0$
- $J(\mathcal{H}) = \mathcal{F}$, et $J(\mathcal{F}) = \mathcal{H}$,
- $Im J = \mathcal{H} \oplus \mathcal{F} = \mathcal{G}$ et $J^2 = -Id_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{F}}$.
- $N_J(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \mathcal{G}$.

Soit maintenant G un groupe de Lie de dimension $n(k+1)$ d'algèbre de Lie \mathcal{G} , muni d'une structure presque k -complexe $(J^1, \dots, J^k; E)$. On suppose que cette structure est invariante à gauche c'est-à-dire que pour tous $g, x \in G$ et $p = 1, \dots, k$ on a :

$$1. (L_g)_* E_x = E_{gx}, (L_g)_* E_x^p = E_{gx}^p, (L_g)_* F_x = F_{gx}.$$

2. Les sous-fibrés E^p, E et F sont intégrables.

Soit $\mathfrak{E}^p, \mathfrak{E}$ et \mathfrak{F} les feuilletages invariants à gauche définis par les sous-fibrés E^p, E et F . Les feuilles H^p, H et K des feuilletages $\mathfrak{E}^p, \mathfrak{F}$ et \mathfrak{E} passant par l'élément neutre e de G , sont des sous-groupes de Lie connexes de G . Désignons par $\mathcal{H}^p, \mathcal{H}$ et \mathcal{F} les algèbres de Lie des sous-groupes H^p, H et K .

D. Algèbres de Lie k -complexes

Soient \mathcal{G} une algèbre de Lie réelle de dimension $n(k+1)$ et \mathcal{H} une sous algèbre de Lie de dimension nk de \mathcal{G} et J^1, \dots, J^k des applications linéaires de \mathcal{G} dans \mathcal{G} . Posons $\mathcal{H}^p = \bigcap_{q \neq p} \ker J^q$.

Définition II.5 On dit que $(J^1, \dots, J^k; \mathcal{H})$ définit une structure k -complexe d'algèbres de Lie sur \mathcal{G} si, les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Le système $\{J^1, \dots, J^k\}$ est non dégénéré, c'est-à-dire, $\bigcap_{p=1}^k \ker J^p = \{0\}$,
2. $\forall p \in \{1, \dots, k\}$, $\ker J^p \subset \mathcal{H}$, $J^1(\mathcal{H}^1) = \dots = J^k(\mathcal{H}^k) = \mathcal{F}$, et $J^p(\mathcal{F}) = \mathcal{H}^p$,
3. $\forall p \in \{1, \dots, k\}$, $Im J^p = \mathcal{H}^p \oplus \mathcal{F}$ est une sous algèbre de Lie de \mathcal{G} notée \mathcal{G}^p et la restriction \widehat{J}^p de J^p à \mathcal{G}^p vérifie $(\widehat{J}^p)^2 = -Id_{\mathcal{G}^p}$,
4. $N_{J^p}(X, Y) = [J^p X, J^p Y] - J^p [J^p X, Y] - J^p [X, J^p Y] - [X, Y] = 0$ pour tous $X, Y \in \mathcal{G}^p = \mathcal{H}^p \oplus J^p(\mathcal{H}^p)$.

Par convention, pour $k = 1$, $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}$ est une sous algèbre de Lie de \mathcal{G} dimension n telle que $\mathcal{G} = \mathcal{H}^1 \oplus J^1(\mathcal{H}^1)$ et $J^1(\mathcal{H}^1) = \mathcal{F}$.

Définition II.6 Une structure 1-complexe sur une algèbre de Lie réelle \mathcal{G} de dimension $2n$ est un couple (J, \mathcal{H}^1) tel que J soit une structure complexe sur \mathcal{G} et \mathcal{H}^1 une sous algèbre de Lie de \mathcal{G} de dimension n tel que $\mathcal{G} = \mathcal{H}^\infty \oplus \mathcal{J}(\mathcal{H}^\infty)$ et $N_J(X, Y) = 0 \forall X, Y \in \mathcal{G}$.

Remarque II.2 Si $(J^1, \dots, J^k; \mathcal{H})$ est une structure k -complexe sur l'algèbre de Lie \mathcal{G} , alors \widehat{J}^p définit une structure 1-complexe d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G}^p = \mathcal{H}^p \oplus \mathcal{F}$.

On va s'intéresser dans un premier temps aux structures k -complexes bi-invariantes, c'est-à-dire, invariantes par l'action adjointe.

E. Structures k -complexes bi-invariantes

Définition II.7 Une structure k -complexe $(J^1, \dots, J^k; \mathcal{H})$ sur l'algèbre de Lie \mathcal{G} est dite bi-invariante si

$$J^p[X, Y] = [X, J^p Y] = [J^p X, Y]$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{G}$ et $1 \leq p \leq k$.

Remarque II.3 Si $(J^1, \dots, J^k; \mathcal{H})$ est une structure k -complexe bi-invariante sur l'algèbre de Lie \mathcal{G} , alors \widehat{J}^p définit une structure 1-complexe d'algèbre de Lie bi-invariante sur $\mathcal{G}^\vee = \mathcal{H}^\vee \oplus \mathcal{F}$.

Proposition II.3 Soit $(J^1, \dots, J^k; \mathcal{H})$, une structure k -complexe bi-invariante sur \mathcal{G} . Alors $\mathcal{H}^p (1 \leq p \leq k)$ \mathcal{H} et \mathcal{F} sont des idéaux de \mathcal{G} .

Démonstration. Soient $X \in \mathcal{H}^p$ et $Y \in \mathcal{G}$. Alors $J^q X = 0$ pour tout $q \neq p$. Ainsi $J^q[X, Y] = [J^q X, Y] = 0$ pour tout $q \neq p$. Donc $[X, Y] \in \mathcal{H}^p$ et \mathcal{H}^p est un idéal de \mathcal{G} .

Soit maintenant $X \in \mathcal{F}$ et $Y \in \mathcal{G}$. Alors $X = J^p(X_p)$ avec $X_p \in \mathcal{H}^p$ ce qui entraîne $[X, Y] = [J^p(X_p), Y] = J^p[X_p, Y]$. Comme \mathcal{H}^p est un idéal, $[X_p, Y] \in \mathcal{H}^p$ et $J^p[X_p, Y] \in \mathcal{F}$. Ainsi \mathcal{F} est aussi un idéal.

Dans (GR), une classification des algèbres de Lie réelles munies d'une structure complexe bi-invariante est abordée. Rappelons les résultats les plus classiques.

Soit $\mathcal{G}_\mathbb{C} = \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}$ la complexifiée de \mathcal{G} . Si \mathcal{G}_i et \mathcal{G}_{-i} sont les sous-espaces propres de J correspondant aux deux valeurs propres i et $-i$, alors $\mathcal{G} = \mathcal{G}_i \oplus \mathcal{G}_{-i}$ et \mathcal{G}_i et \mathcal{G}_{-i} sont des idéaux de \mathcal{G} . Considérons une base réelle de \mathcal{G} , $\{U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n\}$, réduisant J sous forme canonique, c'est-à-dire, $J(U_s) = -V_s$ et $J(V_s) = U_s$. L'idéal \mathcal{G}_i est engendré par les vecteurs $U_s + iV_s$ et \mathcal{G}_{-i} par les vecteurs $U_s - iV_s$. Comme \mathcal{G}_i et \mathcal{G}_{-i} sont des idéaux on en déduit :

$$\begin{cases} [U_s, U_l] = -[V_s, V_l] \\ [U_s, V_l] = [V_s, U_l] \\ [U_s, U_l] - [V_s, V_l] = \sum C_{sl}^r U^r \\ [U_s, V_l] + [V_s, U_l] = \sum D_{sl}^r V^r. \end{cases}$$

Si \mathcal{H} désigne le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs U_s et \mathcal{F} celui par les V_s , les relations ci-dessus impliquent

$$[\mathcal{H}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}, [\mathcal{H}, \mathcal{F}] \subset \mathcal{F}, [\mathcal{F}, \mathcal{F}] \subset \mathcal{H}.$$

Comme une 1-structure complexe bi-invariante est une structure complexe pour laquelle

$$[\mathcal{F}, \mathcal{F}] \subset \mathcal{F}, [\mathcal{H}, \mathcal{F}] = \{0\}.$$

On en déduit donc

$$[\mathcal{F}, \mathcal{F}] = \{0\}.$$

La relation

$$[U_s, U_t] = -[V_s, V_t]$$

implique donc

$$[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = \{0\}.$$

Ainsi une algèbre de Lie munie d'une structure 1-complexe bi-invariante est abélienne. On en déduit que chacune des sous-algèbres \mathcal{G}^p est abélienne et \mathcal{G} est abélienne.

Proposition II.4 Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie de dimension $n(k + 1)$. Si $(J^1, \dots, J^k; \mathcal{H})$ est une structure k -complexe bi-invariante sur \mathcal{G} , alors \mathcal{G} est abélienne.

Exemple II.1 L'exemple le plus intéressant est celui de l'algèbre de Lie abélienne de dimension 3. Notons \mathbb{R}^3 cette algèbre de Lie. Soit (X, Y, Z) une base et J^1 et J^2 les endomorphismes définis par

$$\begin{cases} J^1(X) = -Z, & J^1(Z) = X, \\ J^2(Y) = -Z, & J^2(Z) = Y. \end{cases}$$

Soit E le sous espace engendré par le vecteur Z . Alors $(J^1, J^2; E)$ est une structure 2-complexe bi-invariante sur \mathbb{R}^3 . Chacun des deux plans $\mathbb{R}[X] + \mathbb{R}[Z]$ et $\mathbb{R}[Y] + \mathbb{R}[Z]$ est munie de la structure complexe classique qui est bi-invariante (et qui est aussi une structure 1-complexe). Nous avons donc une extension naturelle des fonctions holomorphes. Une fonction 2-holomorphe sur \mathbb{R}^3 est une fonction

$$f(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

différentiable telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial z}, & \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z}, & \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial z} \end{cases}.$$

F. Classification des algèbres de Lie 1-complexes nilpotentes de $\dim \leq 6$

$\dim \mathbf{G} = 2$.

\mathcal{G} est abélienne.

Les structures 1-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha \neq 0.$$

$\dim \mathbf{G} = 4$.

1. \mathcal{G} est abélienne.

Les structures 1-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha, \beta \neq 0.$$

2. $\mathcal{G} : [X_1, X_2] = X_4$.

Les structures 1-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha, \beta \neq 0.$$

$\dim \mathbf{G} = 6$.

1. $\mathcal{G} : [X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5, [X_2, X_3] = X_6.$

Les structures 1-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne ou d'Heisenberg, } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathcal{G} : [X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5, [X_1, X_4] = X_6, [X_2, X_3] = -X_6.$

Les structures 1-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\alpha}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha \neq (0, 1).$$

3. $\mathcal{G} : [X_1, X_2] = X_5, [X_1, X_4] = X_6, [X_2, X_3] = X_6.$

Les structures 1-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne ou d'Heisenberg, } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\beta}{\beta-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta-1}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \forall \beta \neq (0, 1, -1).$$

4. $\mathcal{G} : [X_1, X_2] = X_4, [X_2, X_3] = X_6, [X_2, X_4] = X_5.$

Les structures 1-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne ou d'Heisenberg, } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

G. Classification des algèbres de Lie 2-complexes nilpotentes de $\dim \leq 9$

$\dim \mathbf{G} = 3$.

\mathcal{G} est abélienne.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J_{\alpha}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_{\beta}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha, \beta \neq 0.$$

$\dim \mathbf{G} = 6$.

1. \mathcal{G} est abélienne.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J_{\alpha, \beta}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha, \beta \neq 0,$$

$$J_{\gamma, \delta}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta} \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \gamma, \delta \neq 0.$$

2. $\mathcal{G} = (0, 0, 0, 0, 0, 35)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J_{\alpha, \beta}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha, \beta \neq 0,$$

$$J_{\gamma, \delta}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \gamma, \delta \neq 0.$$

3. $\mathcal{G} = (0, 0, 0, 13, 0, 35)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} = (0, 0, 0, 13), J_{\alpha, \beta}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha, \beta \neq 0,$$

$$J_{\gamma, \delta}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta} \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \gamma, \delta \neq 0.$$

4. $\mathcal{G} = (0, 0, 0, 0, 0, 15 + 35)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J_{\alpha, \beta}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha, \beta \neq 0,$$

$$J_{\gamma, \delta}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta} \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \gamma, \delta \neq 0.$$

5. $\mathcal{G} = (0, 0, 0, 13, 0, 15 + 35)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} = (0, 0, 0, 13), J_{\alpha, \beta}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha, \beta \neq 0,$$

$$J_{\gamma, \delta}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta} \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \gamma, \delta \neq 0.$$

$\dim \mathbf{G} = 9$.

1. $\mathcal{G} = (0, 71, 81, 0, 74, 84, 0, 0, 78)$.

Les structures 2-complexes sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathcal{G} = (0, 71, 81, 0, 0, 75 + 84, 0, 0, 78)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $\mathcal{G} = (0, 71, 81, 0, 0, 75, 0, 47, 78)$.

Les structures 2-complexes sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. $\mathcal{G} = (0, 71, 81, 0, 74, 84, 0, 0, 0)$.

Les structures 2-complexes sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. $\mathcal{G} = (0, 71, 81, 0, 74, 75 - 48, 0, 0, 0)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_\alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{\alpha-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha \neq (0, 1).$$

6. $\mathcal{G} = (0, 71, 81, 0, 0, 75 + 84, 0, 0, 0)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta-1}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\beta-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \beta \neq (0, 1, -1).$$

7. $\mathcal{G} = (0, 71, 72 - 18, 0, 74, 75 - 48, 0, 0, 0)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} \text{ est abélienne, } J_{\alpha}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{\alpha-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 J_{\alpha}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{\alpha-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha \neq (0, 1).
 \end{aligned}$$

8. $\mathcal{G} = (0, 71, 72 - 18, 0, 0, 75 + 84, 0, 0, 0)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} \text{ est abélienne, } J_{\alpha}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{\alpha-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \alpha \neq (0, 1), \\
 J_{\beta}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta-1}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\beta-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall \beta \neq (0, 1, -1).
 \end{aligned}$$

9. $\mathcal{G} = (0, 0, 72 + 81, 0, 0, 75 + 84, 0, 0, 78)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

10. $\mathcal{G} = (0, 0, 72 + 81, 0, 0, 75, 0, 47, 78)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. $\mathcal{G} = (0, 71, 81, 0, 0, 75, 0, 47, 0)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. $\mathcal{G} = (0, 0, 72 + 81, 0, 0, 75 + 84, 0, 0, 0)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J_\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta-1}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta}{\beta-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall \beta \neq (0, 1, -1),$$

$$J_\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta-1}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\beta-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall \beta \neq (0, 1, -1).$$

13. $\mathcal{G} = (0, 0, 72, 0, 0, 75, 0, 17 + 47, 78)$.

Les structures 2-complexe sur \mathcal{G} sont données par :

$$\mathcal{H} \text{ est abélienne, } J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

III. REFERENCES

-
- ¹ C.Albert, P.Molino, *Pseudogroups de Lie transitifs, I. Structures principales*. Travaux en cours, Hermann. Editions des Sciences et des Arts. Paris (1984)
- ² A. Awane *k-symplectic structures*. Journal of Mathematical physics 33(1992) 4046-4052. U.S.A.
- ³ A. Awane *Some affine properties of the k-symplectic manifolds*. *Beiträge zur Algebra und Geometrie , Contribution to Algebra and Geometry* **39** (1998) , 75 - 83. Germany.
- ⁴ A. Awane *Systèmes extérieures k-symplectiques*. Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino (Italy) Vol. 56, 1(1988). 65-80.
- ⁵ A.Awane, M.Bent Bah, *Almost complex structure*. A.J.M.P. Vol. 2 N° 1 (2005) 71-76.
- ⁶ A.Awane, A.Chkiriba, M.Goze, *k-symplectic affine algebras*. Rendiconti Seminario Facoltà Scienze Università. Vol.74, Fasc. 1-2 (2004) 1-16.
- ⁷ A. Awane, M. Goze, *Pfaffian systems, k-symplectic systems*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/boston/London 2000.
- ⁸ M.L.Barderis, I.Dotti, *Abelian complex structures on solvable Lie algebras*. Journal of Lie Theory.Vol. 14 (2004) 25-34.
- ⁹ M.Goze, B.Hakimjanov, *Nilpotent Lie algebras*. Kluwer Academic Publishers. (1996).
- ¹⁰ M.Goze, Y.B.Hakimjanov, *Nilpotent and solvable Lie algebras*. Handbook of Algebra. Vol.2. (2000) 615-663.
- ¹¹ M.Goze, E.Remm, *non existence of complex structures on filiform Lie algebras*. Université de Haute Alsace. Mulhouse.
- ¹² L.Magnin, *Complex structures on indecomposable 6-dimensional nilpotent real Lie algebras*.
- ¹³ S.M.Salamon, *Complex structures on nilpotent Lie algebras*. J. Pure Appl. Algebra 157 (2001), 311-333.