African Journal Of Mathematical Physics Volume **6** *(2008) 61-75*

Systèmes Extérieurs Symplectiques

A.Awane[a,*], A.Chkiriba[a,†] and M.Goze[b,‡]

[a] *Université HassanII-Mohammedia. Faculté des Sciences Ben M'sik.*
B.P. 7955. Boulevard Driss Harti. Casablanca. Maroc.
[b] *Université de Haute Alsace. Faculté des Sciences et Techniques,*
4, rue des Frères Lumière. 68093 Mulhouse Cedex.
[*] *a.awane@yahoo.fr,* [†] *a.chkiriba@univh2m.ac.ma,* [‡] *M.Goze@uha.fr*
Received 18 December 2006; accepted 13 June 2007 ; availiable online 2 February 2008

Abstract

We study the linear aspect of vectorial polarized structures, or symplectic systems on a vector space. We give a classification of these systems in dimension ≤ 4.
Keywords : systèmes symplectiques, formes extérieures, structues k-symplectiques.
MSC 2000 : 17B30, 17B60, 53Dxx

I. INTRODUCTION

L'un des objectifs principaux qui ont conduit à introduire les structures k-symplectiques[1−9] en tant qu'extension de la géométrie de polarisation, est de proposer le support géométrique des équations de Y. Nambu[10] tout en conservant les liens spécifiques entre la géométrie symplectique et le formalisme hamiltonien classique. Des développements et des propriétés dans la même sens, sont étudiés par différents auteurs, voir par exemples[9,11,12].

Dans cette perspective, la géométrie k-symplectique constitue une structure dans laquelle cohabite des 2-formes différentielles fermées $\theta^1, \ldots, \theta^k$ sur une variété M de dimension $n(k+1)$, s'annulant sur un feuilletage n-codimensional et auxquelles sont associées des applications hamiltoniennes à valeurs dans $\mathbb{R}^{\rceil}$ dont les composantes sont liées au système hamiltonien X_H attaché à H par les relations :

$$i\,(X_H)\,\theta^p = -dH^p.$$

Le théorème de Darboux généralisé montre qu'au voisinage de chaque point x_0 de M, il existe un système de coordonnées locales $(x_i^p, y^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ défini sur un voisinage ouvert U tel que :

$$\theta^p_{|U} = dx_i^p \wedge dy^i$$

et le feuilletage est défini sur U par $dy^1 = \ldots = dy^n = 0$.

L'étude des systèmes extérieurs en dimension supérieur ou égal à quatre, montre qu'il existe une infinité de modèles locaux de systèmes non algébriquement équivalents.

Les systèmes k-symplectiques sont définis directement par des conditions de régularité qui s'interprètent comme des modèles de systèmes extérieurs de rang maximum qui s'annulent sur les champs tangents au feuilletage.

Dans[4], on a introduit la notion de variété polarisée généralisée; cette structure est donnée par un couple (θ, E), tel que θ est une 2-forme différentielle vectorielle fermée sur M s'annulant sur les sections d'un sous fibré intégrable E de TM. Les variétés polarisées et les variétés k-symplectiques sont des variétés polarisées vectorielles particulières. Dans ce travail, on étudie l'aspect linéaire des structures polarisées vectorielles, où, les systèmes symplectiques sur un espace vectoriel, c'est à dire les $(k+1)-$uplets $\left(\theta^1, ..., \theta^k; F\right)$ formé de $2-$formes extérieures θ^p linéairement indépendantes constituant un système non dégénéré et d'une solution maximale F de ce système. On donne ici, un encadrement des dimensions des solutions maximales, comme on donne une classification de ces systèmes en dimension ≤ 4.

II. SYSTÈMES EXTÉRIEURS

A. Définitions et propriétés

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\bigwedge^2 (E^*)$ l'espace des 2-formes extérieures sur E, c'est-à-dire des formes bilinéaires antisymétriques sur E. Soient $\theta^1, ..., \theta^k \in \bigwedge^2 (E^*)$. Une *solution* du système extérieur $\left\{\theta^1 = 0, ..., \theta^k = 0\right\}$ est un sous espace vectoriel F de E vérifiant

$$\theta^p (X, Y) = 0, \text{ pour tous } p = 1, ..., k, \text{ et } X, Y \in F.$$

Notons $A(\theta^p)$ le sous espace de E associé à la forme θ^p:

$$A(\theta^p) = \{X \in E \text{ tel que } i(X)\theta^p = 0\}$$

où $i(X)$ désigne le produit intérieur par X :

$$i(X)\theta(Y) = \theta(X, Y).$$

Définition II.1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension N, F un sous espace vectoriel de codimension n, et $\theta^1, \cdots, \theta^k \in \bigwedge^2 (E^*)$.*
On dit que le $(k+1)-$uplet $\left(\theta^1, \cdots, \theta^k; F\right)$ est un système symplectique sur E si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. *le système extérieur $\left\{\theta^1, \cdots, \theta^k\right\}$ est non dégénéré, c'est-à-dire*

$$A(\theta^1) \cap \cdots \cap A(\theta^k) = \{0\},$$

2. *F est une solution maximale du système $(S) = \{\theta^1 = 0, \ldots, \theta^k = 0\}$.*

Rappelons qu'un sous espace G de E est *totalement isotrope* pour une $2-$forme extérieure θ s'il vérifie

$$\theta (X, Y) = 0 \text{ pour tout } X, Y \in G$$

c'est-à-dire G est solution de l'équation $\theta = 0$. Par définition, le sous espace F est totalement isotrope pour chacune des formes θ^p.

Remarques II.1 *(1) Si $N = n(k+1)$ alors le système symplectique $\left(\theta^1, \cdots, \theta^k; F\right)$ n'est autre qu'une structure $k-$ symplectique sur E au sens de[8].*
(2) Si $k = 1$, les solutions maximales sont de dimension n, et dans ce cas E est un espace vectoriel symplectique.

Exemple II.1 *Considérons sur $\mathbb{R}^4$ les $2-$formes extérieures définies par :*

$$\theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^3$$
$$\theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^4$$

où $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$ est la base duale de $\left(\mathbb{R}^4\right)^*$ d'une base donnée $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$; le sous espace vectoriel F engendré par $\{e_1, e_2\}$ est une solution maximale du système

$$\begin{cases} \theta^1 = 0 \\ \theta^2 = 0. \end{cases}$$

Donc $\left(\theta^1, \theta^2; F\right)$ est une système symplectique sur $\mathbb{R}^4$.

Théorème II.1 *Soit* $(S) = (\theta^1, \ldots, \theta^k; F)$ *un système symplectique sur un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* N*. Alors on a :*

$$\dim F \leq \frac{Nk}{k+1}.$$

Démonstration. Posons $\dim F = p$ avec $p \geq 1$ et $n = N - p$. Considérons une base de E, $\{X_1, ..., X_p, Y_1, ..., Y_n\}$, telle que F soit engendré par $\{X_1, ..., X_p\}$. Soit $\left\{\omega^1, ..., \omega^p, \eta^1, ..., \eta^n\right\}$ la base duale. Puisque la $2-$forme θ^q $(q = 1, \ldots, k)$ s'annule sur F, elle s'écrit :

$$\theta^q = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} a_i^{qj}\omega^i + \sum_{i=1}^{n} b_i^{qj}\eta^i\right) \wedge \eta^j$$

où $a_i^{qj}, b_i^{qj} \in \mathbb{K}$.
Posons, pour tout $q = 1, ..., k$ et $j = 1, ..., n$

$$\omega^{qj} = \sum_{i=1}^{p} a_i^{qj}\omega^i.$$

Supposons $p > nk$, et considérons l'application linéaire sur F définie par :

$$X \longmapsto \left(\omega^{11}(X), ..., \omega^{kn}(X), 0, ..., 0\right).$$

Soit $X \in F$ tel que $\omega^{qj}(X) = 0$, pour tous q et j, alors $i(X)\theta^q = 0$. La non dégénérescence du système $\{\theta^1, ..., \theta^k\}$ entraîne que $X = 0$ c'est-à-dire l'application linéaire est injective ce qui est impossible. Donc $p \leq nk$ c'est-à-dire $\dim F \leq nk$. Come $n = N - dimF$ on a donc $dimF \leq k(N - dimF)$, soit, $dimF \leq \dfrac{kN}{k+1}$. □

Corollaire II.1 *Si* $\dim F = \dfrac{Nk}{k+1}$*, alors* $(\theta^1, \ldots, \theta^k)$ *est une structure* k*-symplectique sur* E*.*

En effet dans ce cas, F est maximal et $dimE = n(k+1)$. Notons qu'il n'existe pas de minoration pour la dimension des solutions, l'exemple qui suit montre qu'il existe des systèmes symplectiques dont la dimension des solutions maximales est 1.
Exemple: Considérons dans $\mathbb{R}^4$ le système symplectique défini par les 2-formes :

$$\begin{cases} \theta^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 &= \omega^1 \wedge \omega^3 - \omega^2 \wedge \omega^4 \\ \theta^3 &= \omega^1 \wedge \omega^4 + \omega^2 \wedge \omega^3 \end{cases}$$

Soient $X, Y \in \mathbb{R}^4$ linéairement indépendants tels que $\theta^1(X,Y) = \theta^2(X,Y) = \theta^3(X,Y) = 0$; alors on a:

$$\begin{aligned} (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_4 - x_4y_3) &= 0 \\ (x_1y_3 - x_3y_1) - (x_2y_4 - x_4y_2) &= 0 \\ (x_1y_4 - x_4y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) &= 0. \end{aligned}$$

On peut supposer que $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$ et par un changement de base adéquat sur $\mathbb{R}^4$ on peut supposer que $x_1 = y_2 = 1$ et $x_2 = y_1 = 0$. Donc les équations précédentes donnent :

$$\begin{aligned} &1 + (x_3y_4 - x_4y_3) = 0 \\ &y_3 + x_4 = 0 \\ &y_4 - x_3 = 0 \end{aligned}$$

ce système est impossible et la solution maximale est de dimension 1.

Proposition II.1 ***Soit*** $(S) = (\theta^1, \ldots, \theta^k; F)$ ***un système symplectique. Si*** $\dim F = N-1$ ***alors*** $k = N-1$ ***et*** $(\theta^1, \ldots, \theta^k, F)$ ***est une structure*** $k-$***symplectique sur*** E.

Démonstration. **Soient** $\{X_1, ..., X_N\}$ **une base de** E **telle que** $\{X_1, ..., X_{N-1}\}$ **soit une base de** F **et** $\left\{\omega^1, ..., \omega^N\right\}$ **la base duale. Puisque** $\theta^q_{|F\times F} = 0$ **alors** $\theta^q = \left(\sum\limits_{i=1}^{N-1} A^q_i \omega^i\right) \wedge \omega^N$ **pour tous** $q = 1, ..., k$. **Or** $\theta^1, ..., \theta^k$ **sont linéairement indépendantes, donc** $k \leq N-1$.

Soit $X = (x_1, ..., x_N) \in \bigcap\limits_{q=1}^{k} A(\theta^q)$ **alors** X **est solution des systèmes**

$$\begin{cases} A^q_1 x_1 + ... + A^q_{N-1} x_{N-1} = 0 \\ A^q_1 x_N = 0 \\ \vdots \\ A^q_1 x_N = 0. \end{cases}$$

pour tous $q = 1, ..., k$. **Puisque** $\theta^q \neq 0$ **alors** $x_N = 0$, **donc** $(x_1, ..., x_n)$ **est solution du système suivant :**

$$\begin{cases} A^1_1 x_1 + ... + A^1_{N-1} x_{N-1} = 0 \\ \vdots \\ A^k_1 x_1 + ... + A^k_{N-1} x_{N-1} = 0. \end{cases}$$

Pour que ce système n'admette que la solution triviale il faut que $k \geq N-1$ **et un mineur d'ordre** $N-1$ **soit non nul. Donc** $k = N-1$ **et** $det\left(A^i_j\right)_{1\leq i,j\leq k} \neq 0$. **Par conséquent** $(\theta^1, \ldots, \theta^k; F)$ **est une structure** $k-$**symplectique sur** E. □

B. Solutions d'un système symplectique

Etant donné $\theta \in \bigwedge^2 E$, **un** $p-$**plan** F $(p \geq 2)$ **est solution de l'équation extérieure** $\theta = 0$ **si et seulement si tous les** $2-$**plans contenus dans** F **sont solutions de cette équation.**

Pour un système symplectique on étudie les solutions F **de dimension** ≤ 2.

1. ***Cas où*** *dimF* $= 2$.

Soient $\{e_1, ..., e_n\}$ **une base de l'espace vectoriel** E **et** $\left\{f^1, ..., f^n\right\}$ **la base duale. Alors on a**

$$\theta^p = \sum_{1\leq i<j\leq n} \theta^p_{ij} f^i \wedge f^j, \quad 1 \leq p \leq k$$

Posons

$$M = \begin{pmatrix} \theta^1_{12} & \cdots & \theta^1_{n-1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^k_{12} & \cdots & \theta^k_{n-1n} \end{pmatrix}$$

Puisque les 2**-formes** θ^i $(1 \leq i \leq k)$ **sont linéairement indépendantes, le rang de** M **est égal à** k. **Soit** $\{v_1, v_2\}$ **une base de** F, **alors on a**

$$\begin{cases} v_1 = a_1 e_1 + ... + a_n e_n \\ v_2 = b_1 e_1 + ... + b_n e_n. \end{cases}$$

Posons

$$u_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix}$$

alors $u = (u_{12}, ..., u_{n-1n})$ **sont les coordonnées de Plücker de** F. **On a la proposition suivante qui caractérise les solutions de dimension** 2 **:**

Proposition II.2 ***Le sous espace vectoriel*** F ***de*** E ***est une solution du système*** $\left\{\theta^1, ..., \theta^k\right\}$ ***si et seulement si***

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \theta_{ij}^p u_{ij} = 0, \ \textbf{\textit{pour}} \ p = 1, ..., k$$

c'est-à-dire les coordonnées de Plücker $u = (u_{12}, ..., u_{n-1n})$ ***de*** F ***est un élément de*** $kerM$.

Démonstration. **Soit** F **une solution du système** $\left\{\theta^1, ..., \theta^k\right\}$ **de base** $\{v_1, v_2\}$**. On a**

$$\theta^p(v_1, v_2) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \theta_{ij}^p (a_i b_j - a_j b_i) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \theta_{ij}^p u_{ij} = 0$$

pour $p = 1, ..., k$**, c'est-à-dire** $u = (u_{ij})_{1\leq i<j\leq n} \in kerM$.

Réciproquement, si $u \in kerM$ **alors** $\theta^p(v_1, v_2) = 0$ **pour** $p = 1, ..., k$**. Donc** $\theta^p(X, Y) = 0$ **pour tous** $X, Y \in F$**, c'est-à-dire** F **est une solution du système** $\left\{\theta^1, ..., \theta^k\right\}$ □

On donne dans le corollaire ci-dessous une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution de dimension 2 **du système** $\left\{\theta^1, ..., \theta^k\right\}$**. On rappelle le théorème suivant :**

Théorème II.2 [8] ***Le système*** $(u_{ij})_{1\leq i<j\leq n}$***, l'un des paramètres*** u_{ij} ***étant non nul, est un système de coordonnées de Plücker si et seulement si la*** 2***-forme***

$$\eta = \sum_{1\leq i<j\leq n} u_{ij} f^i \wedge f^j$$

est une forme monôme.

On déduit le corollaire suivant :

Corollaire II.2 ***Soit*** $u = (u_{ij})_{1\leq i<j\leq n} \in kerM$. ***Le système*** u ***est un système de coordonnées de Plücker d'un*** 2***-plan*** F ***solution de*** $\left\{\theta^1, ..., \theta^k\right\}$ ***si et seulement si la*** 2***-forme***

$$\eta = \sum_{1\leq i<j\leq n} u_{ij} f^i \wedge f^j$$

est une forme monôme.

2. ***Cas où*** $dimF < 2$.

Soit $(S) = \left\{\theta^1, \ldots, \theta^k\right\}$ **un système de** 2**-formes extérieures sur** E**. Si** $\left\{f^1, ..., f^n\right\}$ **est une base de** E^* **alors les** $2-$**formes** $\theta^1, ..., \theta^k$ **s'écrivent**

$$\theta^p = \sum_{1\leq i<j\leq n} \theta_{ij}^p f^i \wedge f^j$$

et

$$M = \begin{pmatrix} \theta_{12}^1 & \cdots & \theta_{n-1n}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_{12}^k & & \theta_{n-1n}^k \end{pmatrix}$$

est la matrice de (S) **de rang** k.

On a montré que si F **est un sous espace vectoriel de** E **de dimension** 2 **alors** F **est une solution de** (S) **si et seulement si le système de coordonnées de Plücker de** F **est un élément du noyau de** M.

Le système (S) **admet toujours une solution de dimension** 1**, on donne dans la proposition suivante des conditions pour que le système** (S) **n'admette que des solutions de dimension** 1.

Proposition II.3 (i) ***Si*** $kerM = \{0\}$, ***c'est-à-dire*** $k = \frac{n(n-1)}{2}$ ***avec*** $n = dimE$, ***alors le système*** (S) ***n'admet pas de solutions de dimension*** ≥ 2,

(ii) ***Si*** $kerM \neq \{0\}$ ***et si pour tout*** $u = (u_{12}, ..., u_{n-1n}) \in kerM$ ***tel que la*** 2***-forme***

$$\theta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{ij} f^i \wedge f^j$$

n'est pas une forme monôme alors (S) ***n'admet pas de solution de dimension*** 2.

On donne ici un exemple de la première situation dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple II.2 ***Soit*** $(S) = \left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right)$ ***un système de*** $2-$***forme dans*** $\mathbb{R}^3$ ***telle que***

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^2 \\ \theta^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^3 = \omega^2 \wedge \omega^3 \end{cases}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de (S). ***On a*** $kerM = \{0\}$ ***donc*** (S) ***n'admet pas de solution de dimension*** 2.

Démonstration de la proposition. (i) Si le système (S) admet une solution de dimension 2 alors les coordonnées de Plücker de cette solution constituent un élément de $kerM$, ce qui est impossible. La démonstration de (ii) est claire. □

III. CLASSIFICATION DES SYSTÈMES SYMPLECTIQUES

Définition III.1 ***Deux systèmes extérieures*** (S) ***et*** (S') ***sont dits équivalents, s'ils engendrent le même idéal.***

Soit (S) un système extérieur sur $\mathbb{R}^n$ engendré par les équations

$$\begin{cases} \theta^1 = 0 \\ \vdots \\ \theta^k = 0, \end{cases}$$

où les θ^p sont des $2-$formes extérieures linéairement indépendantes.

Notons que si le système (S) possède une solution maximale de dimension p alors le nombre de $2-$formes (linéairement indépendantes) dans (S) est inférieur ou égal à $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}$.

Si (S) admet une solution maximale de codimension 1 alors, d'après ce qui précède, (S) est un système $k-$symplectique et la classification est donnée par le théorème de Darboux[8].

Pour $k = 1$, la classification du système (S) est entièrement déterminée par le rang de θ. On se propose de donner la classification, en petite dimension, des systèmes symplectiques généralisées $(S) = \left(\theta^1, ..., \theta^k\right)$ sur un espace vectoriel de dimension n, pour $2 \leq k \leq \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}$.

A. Classification des 2-systèmes symplectiques en dimension 3

Soit $(S) = (\theta^1, \theta^2)$ un système symplectique sur $\mathbb{R}^3$. Si F est une solution de (S) de dimension 2 alors on a montré précédemment que $(\theta^1, \theta^2; F)$ est un système 2-symplectique sur $\mathbb{R}^3$. D'après le théorème de Darboux[8] il existe une base $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ de $(\mathbb{R}^3)^*$ telle que

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^3. \end{cases}$$

La proposition suivante donne la classification, tenant compte de cette remarque.

Proposition III.1 ***Tout système symplectique*** $(S) = (\theta^1, \theta^2)$ ***sur*** $\mathbb{R}^3$ ***possède des solutions de dimension*** ≥ 2.

Démonstration. **Supposons que toute solution de (S) est de dimension 1. Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E et $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ la base duale alors les 2- formes θ^1 et θ^2 s'écrivent :**

$$\begin{cases} \theta^1 = a_1\omega^1 \wedge \omega^2 + a_2\omega^1 \wedge \omega^3 + a_3\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = b_1\omega^1 \wedge \omega^2 + b_2\omega^1 \wedge \omega^3 + b_3\omega^2 \wedge \omega^3. \end{cases}$$

Puisque θ^1 et θ^2 sont linéairement indépendantes, alors on peut supposer que le déterminant $\delta_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ est non nul. Par le changement de base

$$\begin{cases} \eta^1 = \omega^1 \\ \eta^2 = a_1\omega^2 + a_2\omega^3 \\ \eta^3 = b_1\omega^2 + b_2\omega^3 \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \theta^1 = \eta^1 \wedge \eta^2 + a_3'\eta^2 \wedge \eta^3 \\ \theta^2 = \eta^1 \wedge \eta^3 + b_3'\eta^2 \wedge \eta^3 \end{cases}$$

avec $a_3', b_3' \in \mathbb{R}$.
Soit $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ tel que $i(X)\theta^p = 0$ pour $p = 1, 2$. On a alors

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - a_3'x_3 = 0 \\ a_3'x_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ b_3'x_3 = 0 \\ x_1 + b_3'x_2 = 0 \end{cases}$$

par conséquent $X = 0$ c'est-à-dire $A(\theta^1) \cap A(\theta^2) = \{0\}$.
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3' \\ 0 & 1 & b_3' \end{pmatrix}$ la matrice du système (θ^1, θ^2). Le $\ker M$ est engendré par $(a_3', b_3', -1)$ de plus la $2-$forme

$$\theta = a_3'\eta^1 \wedge \eta^2 + b_3'\eta^1 \wedge \eta^3 - \eta^2 \wedge \eta^3 = (a_3'\eta^1 + \eta^3) \wedge (-b_3'\eta^1 + \eta^2)$$

est une forme monôme. Donc, d'après l'étude faite dans la section précédente, $(a_3', b_3', -1)$ sont les coordonnées de Plûcker d'un $2-$plan solution du système (θ^1, θ^2), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. □

Corollaire III.1 ***Si*** (θ^1, θ^2) ***est un système de*** $2-$***formes de matrice*** M ***de rang*** 2 ***alors pour tout vecteur non nul*** $v = (a, b, c)$ ***de*** $kerM$ ***la*** 2-***forme***

$$\theta = a\omega^1 \wedge \omega^2 + b\omega^1 \wedge \omega^3 + c\omega^2 \wedge \omega^3$$

est une forme monôme.

B. Classification des 3-systèmes symplectiques en dimension 3

Soit $(S) = \left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right)$ **un système symplectique.**

Lemme III.1 ***Toute solution maximale est dedimension*** 1**.**

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ **une base de** $\mathbb{R}^3$ **telle que** $\{e_1, e_2\}$ **engendre une solution** F **de dimension** 2 **du système** $(S) = \left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right)$**. Dans la base duale** $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\right\}$ **de** $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ **les** $2-$**formes** θ^p **s'écrivent**

$$\left\{\begin{array}{l} \theta^1 = \left(a_1\omega^1 + a_2\omega^2\right) \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \left(b_1\omega^1 + b_2\omega^2\right) \wedge \omega^3 \\ \theta^3 = \left(c_1\omega^1 + c_2\omega^2\right) \wedge \omega^3. \end{array}\right.$$

Donc le système (S) **est de rang** 2, **ce qui est impossible. D'où le lemme.**

Soit $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\right\}$ **une base de** $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$**; les** $2-$**formes** $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ **s'écrivent**

$$\left\{\begin{array}{l} \theta^1 = a_1\omega^1 \wedge \omega^2 + a_2\omega^1 \wedge \omega^3 + a_3\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = b_1\omega^1 \wedge \omega^2 + b_2\omega^1 \wedge \omega^3 + b_3\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \theta^3 = c_1\omega^1 \wedge \omega^2 + c_2\omega^1 \wedge \omega^3 + c_3\omega^2 \wedge \omega^3 \end{array}\right.$$

avec

$$det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

car elles sont linéairement indépendantes.

Soit $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in A\left(\theta^1\right) \cap A\left(\theta^2\right) \cap A\left(\theta^3\right)$ **alors ses coordonnées vérifient les systèmes :**

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x_2 + a_2x_3 = 0 \\ a_1x_1 - a_3x_3 = 0 \\ a_2x_1 + a_3x_2 = 0 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{l} b_1x_2 + b_2x_3 = 0 \\ b_1x_1 - b_3x_3 = 0 \\ b_2x_1 + b_3x_2 = 0 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{l} c_1x_2 + c_2x_3 = 0 \\ c_1x_1 - c_3x_3 = 0 \\ c_2x_1 + c_3x_2 = 0. \end{array}\right.$$

on en déduit que $X = 0$ **c'est-à-dire le système est non dégénéré. On en déduit que**

Remarque III.1 ***Toute famille*** $\left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right)$ ***de*** $2-$***formes linéairement indépendantes dans*** $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ ***forme un système symplectique dont toute solution maximale est de dimension*** 1.

Puisque l'un au moins des mineurs $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ **est non nul, on peut supposer que les formes linéaires** $a_1\omega^2 + a_2\omega^3$ **et** $b_1\omega^2 + b_2\omega^3$ **sont linéairements indépendantes. Si on remplace** ω^2 **par** $a_1\omega^2 + a_2\omega^3$ **et** ω^3 **par** $b_1\omega^2 + b_2\omega^3$ **dans les expressions des** θ^p **on obtient**

$$\left\{\begin{array}{l} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^2 + a\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 + b\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \theta^3 = c_1'\omega^1 \wedge \omega^2 + c_2'\omega^1 \wedge \omega^3 + c_3'\omega^2 \wedge \omega^3. \end{array}\right.$$

Les $2-$**formes** $\theta^1, \theta^2, \theta^3 - c_1'\theta^1 - c_2'\theta^2$ **sont aussi linéairement indépendantes et possèdent les mêmes solutions alors on peut supposer que** $\theta^3 = \omega^2 \wedge \omega^3$ **(quitte à diviser par un coefficient non nul). Et si on remplace** θ^1 **par** $\theta^1 - a\theta^3$ **et** θ^1 **par** $\theta^2 - b\theta^3$ **on obtient le modèle**

$$\left\{\begin{array}{l} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^2 \\ \theta^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^3 = \omega^2 \wedge \omega^3. \end{array}\right.$$

On déduit alors le résultat suivant :

Théorème III.1 ***Si*** $(S) = \left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right)$ ***est un système symplectique sur*** $\mathbb{R}^3$ ***alors toute solution est de dimension*** 1***, et il existe une base*** $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\right\}$ ***de*** $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ ***telle que***

$$\left\{\begin{array}{l} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^2 \\ \theta^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^3 = \omega^2 \wedge \omega^3. \end{array}\right.$$

C. Classification des 2-systèmes symplectiques en dimension 4

Soit $(S) = \left(\theta^1, \dots, \theta^k\right)$ un système symplectique dans $\mathbb{R}^4$.

1) Si (S) admet une solution maximale de dimension 3, alors, d'après l'étude faite dans la première section, $k = 3$ et dans ce cas (S) est une structure 3-symplectique.

2) Si (S) possède une solution maximale de dimension 2 alors le nombre de 2-formes linéairement indépendantes dans (S) est inférieur ou égal 5.

3) Si (S) possède une solution maximale de dimension 1 alors le nombre de $2-$formes linéairement indépendantes dans (S) est maximale $\left(= \dim \bigwedge^2 \left(\mathbb{R}^4\right)^*\right)$.

On donne ici la classification d'un système $(S) = \left(\theta^1, \dots, \theta^k\right)$ en dimension 4 dont la dimension des solutions maximales est inférieure ou égale à 2 et $2 \leq k \leq 3$.

*1. (S) **admet une solution maximale de dimension** 2.*

Soit $(S) = \left(\theta^1, \theta^2\right)$ un système symplectique sur $\mathbb{R}^4$, alors on a la proposition suivante :

Proposition III.2 ***Supposons que θ^1 et θ^2 sont dégénérées, alors il existe une base $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$ de $\left(\mathbb{R}^4\right)^*$ telle que :***

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^4. \end{cases}$$

Démonstration. **Soient F une solution maximale de (S) de dimension 2, et $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ une base de $\mathbb{R}^4$ telle que $\{X_1, X_2\}$ soit une base de F. Soit $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$ la base duale de $\left(\mathbb{R}^4\right)^*$. Alors**

$$\theta^1 = \left(a_1^1 \omega^1 + a_2^1 \omega^2\right) \wedge \omega^3 + \left(b_1^1 \omega^1 + b_2^1 \omega^2\right) \wedge \omega^4 + c_1 \omega^3 \wedge \omega^4$$

$$\theta^2 = \left(a_1^2 \omega^1 + a_2^2 \omega^2\right) \wedge \omega^3 + \left(b_1^2 \omega^1 + b_2^2 \omega^2\right) \wedge \omega^4 + c_2 \omega^3 \wedge \omega^4.$$

Si l'une des $2-$formes θ^1 ou θ^2 est non dégénérée, $A\left(\theta^1\right) \cap A\left(\theta^2\right) = \{0\}$, et le système $\left\{\theta^1, \theta^2\right\}$ est non dégénéré.

Si les $2-$formes θ^1 et θ^2 sont dégénérées, alors les déterminants $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ b_1^1 & b_2^1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix}$ sont nuls, par conséquent il existe d_1 et d_2 dans $\mathbb{R}$ tels que les $2-$formes θ^1 et θ^2 s'écrivent :

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \left(a_1^1 \omega^1 + a_2^1 \omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d_1 \omega^4\right) + c_1 \omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 &= \left(a_1^2 \omega^1 + a_2^2 \omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d_2 \omega^4\right) + c_2 \omega^3 \wedge \omega^4. \end{aligned}$$

Soit $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in A(\theta^1) \cap A(\theta^2)$ ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 - c_1 x_4 = 0 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 - c_2 x_4 = 0 \\ x_3 + d_1 x_4 = 0 \\ x_3 + d_2 x_4 = 0, \end{cases}$$

et $X = 0$ si et seulement si le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 & -c_1 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \end{pmatrix}$$

est non nul, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} \neq 0$ **et** $d_1 \neq d_2$

(dans ces conditions θ^1 **et** θ^2 **sont linéairement indépendantes.**

Posons maintenant $\widetilde{\omega}^1 = a_1^1\omega^1 + a_2^1\omega^2$, $\widetilde{\omega}^2 = a_1^2\omega^1 + a_2^2\omega^2$, $\widetilde{\omega}^3 = \omega^3 + d_1\omega^4$ **et** $\widetilde{\omega}^4 = \omega^3 + d_2\omega^4$ **alors on a**

$$\omega^3 \wedge \omega^4 = \frac{\widetilde{\omega}^3 \wedge \widetilde{\omega}^4}{d_2 - d_1},$$

on déduit que, dans la base $\left\{\widetilde{\omega}^1, \widetilde{\omega}^2, \widetilde{\omega}^3, \widetilde{\omega}^4\right\}$ **les** 2**-formes s'écrivent**

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \widetilde{\omega}^1 \wedge \widetilde{\omega}^3 + \alpha_1\widetilde{\omega}^3 \wedge \widetilde{\omega}^4 \\ \theta^2 &= \widetilde{\omega}^2 \wedge \widetilde{\omega}^4 + \alpha_2\widetilde{\omega}^3 \wedge \widetilde{\omega}^4, \end{aligned}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$**. Si on remplace** ω^1 **par** $\omega^1 - \alpha_1\omega^4$ **et** ω^2 **par** $\omega^2 + \alpha_2\omega^3$ **on obtient**

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^4 \end{cases}$$

ce qui montre la proposition.

*2. **Toute solution de*** (S) ***est de dimension*** 1.

Soient $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ **une base de** $\mathbb{R}^4$**. Si** $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$ **est la base duale alors on a :**

$$\begin{aligned} \theta^1 &= a_1\omega^1 \wedge \omega^2 + a_2\omega^1 \wedge \omega^3 + a_3\omega^1 \wedge \omega^4 + a_4\omega^2 \wedge \omega^3 + a_5\omega^2 \wedge \omega^4 + a_6\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 &= b_1\omega^1 \wedge \omega^2 + b_2\omega^1 \wedge \omega^3 + b_3\omega^1 \wedge \omega^4 + b_4\omega^2 \wedge \omega^3 + b_5\omega^2 \wedge \omega^4 + b_6\omega^3 \wedge \omega^4. \end{aligned}$$

Puisque θ^1 **et** θ^2 **sont linéairement indépendantes, on peut supposer** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$**. Par le changement de base :**

$$\begin{cases} \eta^1 &= & \omega^1 \\ \eta^2 &= & a_1\omega^2 + a_2\omega^3 + a_3\omega^4 \\ \eta^3 &= & b_1\omega^2 + b_2\omega^3 + b_3\omega^4 \\ \eta^4 &= & \omega^4 \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \eta^1 \wedge \eta^2 + a_4^{'}\eta^2 \wedge \eta^3 + a_5^{'}\eta^2 \wedge \eta^4 + a_6^{'}\eta^3 \wedge \eta^4 \\ \theta^2 &= \eta^1 \wedge \eta^3 + b_4^{'}\eta^2 \wedge \eta^3 + b_5^{'}\eta^2 \wedge \eta^4 + b_6^{'}\eta^3 \wedge \eta^4. \end{aligned}$$

Le sous espace vectoriel engendré par e_1 **et** e_4 **est une solution de** (S)**, ceci est en contradiction avec l'hypothèse.**

Proposition III.3 ***Il n'existe aucun système symplectique*** $(S) = \left(\theta^1, \theta^2\right)$ ***dans*** $\mathbb{R}^4$ ***dont toute solution est de dimension*** 1***.***

D. Classification des 3**-systèmes symplectiques en dimension** 4

Soit $(S) = \left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right)$ **un système symplectique dans** $\mathbb{R}^4$ **on suppose que** (S) **n'admet pas de solution de dimension** 3.

Proposition III.4 ***Si*** $(S) = \left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right)$ ***possède une solution maximale de dimension*** 2 ***avec*** θ^1, θ^2 ***et*** θ^3 ***sont dégénérées alors il existe une base*** $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$ ***de*** $\left(\mathbb{R}^4\right)^*$ ***telle que :***

$$\begin{cases} \theta^1 &= \left(a_1^1\omega^1 + a_2^1\omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d_1\omega^4\right) + c_1\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 &= \left(a_1^2\omega^1 + a_2^2\omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d_2\omega^4\right) + c_2\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^3 &= \left(a_1^3\omega^1 + a_2^3\omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d_3\omega^4\right) + c_3\omega^3 \wedge \omega^4 \end{cases}$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & -c_1 \\ a_1^2 & a_2^2 & -c_2 \\ a_1^3 & a_2^3 & -c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

si $d_1 = d_2 = d_3$

2. l'un des mineurs d'ordre 2 ***de la matrice suivante :***

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_1^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{pmatrix}$$

est non nul, s'il existe $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ ***tel que*** $d_i \neq d_j$

Démonstration. **Soient** $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ **une base de** $\mathbb{R}^4$ **telle que** $\{e_1, e_2\}$ **soit une base d'une solution maximale** F **de** (S) **et** $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$ **sa base duale de** $\left(\mathbb{R}^4\right)^*$**. Alors**

$$\begin{cases} \theta^1 &= \left(a_1^1\omega^1 + a_2^1\omega^2\right) \wedge \omega^3 + \left(b_1^1\omega^1 + b_2^1\omega^2\right) \wedge \omega^4 + c_1\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 &= \left(a_1^2\omega^1 + a_2^2\omega^2\right) \wedge \omega^3 + \left(b_1^2\omega^1 + b_2^2\omega^2\right) \wedge \omega^4 + c_2\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^3 &= \left(a_1^3\omega^1 + a_2^3\omega^2\right) \wedge \omega^3 + \left(b_1^3\omega^1 + b_2^3\omega^2\right) \wedge \omega^4 + c_3\omega^3 \wedge \omega^4 \end{cases}$$

Comme les 2**-formes** θ^1, θ^2 **et** θ^3 **sont dégénérées, on a**

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ b_1^1 & b_2^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 \\ b_1^3 & b_2^3 \end{vmatrix} = 0,$$

par conséquent il existe $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ **tels que les** $2-$**formes** θ^q **s'écrivent :**

$$\begin{cases} \theta^1 &= \left(a_1^1\omega^1 + a_2^1\omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d_1\omega^4\right) + c_1\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 &= \left(a_1^2\omega^1 + a_2^2\omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d_2\omega^4\right) + c_2\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^3 &= \left(a_1^3\omega^1 + a_2^3\omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d_3\omega^4\right) + c_3\omega^3 \wedge \omega^4. \end{cases}$$

Soit $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in A\left(\theta^1\right) \cap A\left(\theta^2\right) \cap A\left(\theta^3\right)$ **alors on a le système suivant :**

$$\begin{cases} a_1^1x_1 + a_2^1x_2 - c_1x_4 = 0 \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 - c_2x_4 = 0 \\ a_1^3x_1 + a_2^3x_2 - c_3x_4 = 0 \\ x_3 + d_1x_4 = 0 \\ x_3 + d_2x_4 = 0 \\ x_3 + d_3x_4 = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

1) Lorsque $d_1 = d_2 = d_3 = d$ **alors ce système devient**

$$\begin{cases} a_1^1x_1 + a_2^1x_2 - c_1x_4 = 0 \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 - c_2x_4 = 0 \\ a_1^3x_1 + a_2^3x_2 - c_3x_4 = 0 \\ x_3 + dx_4 = 0 \end{cases},$$

qui n'admet que la solution nulle si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & -c_1 \\ a_1^2 & a_2^2 & -c_2 \\ a_1^3 & a_2^3 & -c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2) S'il existe $i \neq j \in \{1,2,3\}$ tel que $d_i \neq d_j$ alors le système 3.1 s'écrit :

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 = 0 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 = 0 \\ a_1^3 x_1 + a_2^3 x_2 = 0 \\ x_3 = x_4 = 0, \end{cases}$$

donc X est nul, c'est-à-dire le système $\left\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\right\}$ est non dégénéré, si l'un des mineurs δ_{ij} d'ordre 2 de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{pmatrix}$$

est non nul □

On étudie maintenant les deux cas de la proposition précédente.

Proposition III.5 ***Supposons que*** $d_1 = d_2 = d_3$ ***alors il existe une base*** $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$ ***de*** $\left(\mathbb{R}^4\right)^*$ ***telle que :***

$$\begin{cases} \theta^1 &= \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 &= \omega^2 \wedge \omega^3 \\ \theta^3 &= \omega^4 \wedge \omega^3. \end{cases}$$

Démonstration. **Si $d_1 = d_2 = d_3$ alors les 2-forme $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ s'écrivent sous la forme :**

$$\begin{cases} \theta^1 &= \left(a_1^1\omega^1 + a_2^1\omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d\omega^4\right) + c_1\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 &= \left(a_1^2\omega^1 + a_2^2\omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d\omega^4\right) + c_2\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^3 &= \left(a_1^3\omega^1 + a_2^3\omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d\omega^4\right) + c_3\omega^3 \wedge \omega^4. \end{cases}$$

avec

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & -c_1 \\ a_1^2 & a_2^2 & -c_2 \\ a_1^3 & a_2^3 & -c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Posons $\delta_{12} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}, \delta_{13} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}, \delta_{23} = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}$ **et supposons que $\delta_{12} \neq 0$, alors dans la base**

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}^1 = a_1^1\omega^1 + a_2^1\omega^2 \\ \widetilde{\omega}^2 = a_1^2\omega^1 + a_2^2\omega^2 \\ \widetilde{\omega}^3 = \omega^3 + d\omega^4 \\ \widetilde{\omega}^4 = \omega^4. \end{cases}$$

les 2-formes $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \theta^1 &= & \left(\widetilde{\omega}^1 - c_1\widetilde{\omega}^4\right) \wedge \widetilde{\omega}^3 \\ \theta^2 &= & \left(\widetilde{\omega}^2 - c_2\widetilde{\omega}^4\right) \wedge \widetilde{\omega}^3 \\ \theta^3 &= & \frac{1}{\delta_{12}}\left(\delta_{23}\widetilde{\omega}^1 - \delta_{13}\widetilde{\omega}^2 - c_3 \wedge \widetilde{\omega}^4\right) \wedge \widetilde{\omega}^3. \end{cases}$$

Les formes linéaires

$$\begin{cases} \eta^1 = \widetilde{\omega}^1 - c_1\widetilde{\omega}^4 \\ \eta^2 = \widetilde{\omega}^2 - c_2\widetilde{\omega}^4 \\ \eta^3 = \widetilde{\omega}^3 \\ \eta^4 = \delta_{23}\widetilde{\omega}^1 - \delta_{13}\widetilde{\omega}^2 - c_3\widetilde{\omega}^4 \end{cases}$$

sont linéairement indépendantes, donc dans la base $\left\{\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4\right\}$ **on a**

$$\begin{cases} \theta^1 & = & \eta^1 \wedge \eta^3 \\ \theta^2 & = & \eta^2 \wedge \eta^3 \\ \theta^3 & = & \eta^4 \wedge \eta^3, \end{cases}$$

et donc le système est $3-$**symplectique.** $\square$

Remarque III.2 ***Le sous espace*** $F = ker\,\eta^3$ ***est une solution maximale de dimension*** 3 ***du système symplectique***

$$\begin{cases} \theta^1 & = & \eta^1 \wedge \eta^3 \\ \theta^2 & = & \eta^2 \wedge \eta^3 \\ \theta^3 & = & \eta^4 \wedge \eta^3 \end{cases}$$

par conséquant ce système définit une structure $3-$***symplectique. On peut conclure que ce cas est en contradiction avec l'hypothèse, le système n'admet pas de solution de dimension*** 3***.***

Proposition III.6 ***Supposons qu'il existe*** $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ ***tels que*** $d_i \neq d_j$ ***alors il existe une base*** $(\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)$ ***de*** $\left(\mathbb{R}^4\right)^*$ ***telle que :***

$$\begin{cases} \theta^1 & = & \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 & = & \omega^2 \wedge \omega^4 \\ \theta^3 & = & a\omega^1 \wedge \omega^3 + b\omega^1 \wedge \omega^4 + c\omega^2 \wedge \omega^3 + d\omega^2 \wedge \omega^4 + e\omega^3 \wedge \omega^4. \end{cases}$$

avec $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ***et*** b, c, e ***non tous nuls.***

Pour montrer cette proposition on montre d'abord le lemme suivant :

Lemme III.2 ***Les notations étant celles de la proposition III.4. S'il existe*** $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ ***tel que*** $d_i \neq d_j$ ***alors il existe*** $i_0 \neq j_0 \in \{1, 2, 3\}$ ***tel que*** $d_{i_0} \neq d_{j_0}$ ***et le mineur*** $\delta_{i_0 j_0}$ ***est non nul.***

Démonstration du lemme. **Faisons la démonstration pour** $i = 1$ **et** $j = 2$**. Supposons** $\delta_{12} = 0$ **alors** $\delta_{13} \neq 0$ **et** $\delta_{23} \neq 0$**. Si** $d_1 \neq d_3$ **alors on prend** $i_0 = 1$ **et** $j_0 = 3$**; si** $d_3 = d_1$ **alors on a nécessairement** $d_3 \neq d_2$ **donc on prend** $i_0 = 2$ **et** $j_0 = 3$ **, d'où le lemme.** $\square$

Démonstration de la proposition. **On sait qu'il existe une base** $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$ **de** $\left(\mathbb{R}^4\right)^*$ **telle que :**

$$\begin{cases} \theta^1 & = & \left(a_1^1\omega^1 + a_2^1\omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d_1\omega^4\right) + c_1\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 & = & \left(a_1^2\omega^1 + a_2^2\omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d_2\omega^4\right) + c_2\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^3 & = & \left(a_1^3\omega^1 + a_2^3\omega^2\right) \wedge \left(\omega^3 + d_3\omega^4\right) + c_3\omega^3 \wedge \omega^4. \end{cases}$$

Puisqu'il existe $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ **tel que** $d_i \neq d_j$ **alors d'après le lemme précédent on peut supposer que** $d_1 \neq d_2$ **et** $\delta_{12} \neq 0$**. Donc par le changement de base :**

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}^1 & = & a_1^1\omega^1 + a_2^1\omega^2 \\ \widetilde{\omega}^2 & = & a_1^2\omega^1 + a_2^2\omega^2 \\ \widetilde{\omega}^3 & = & \omega^3 + d_1\omega^4 \\ \widetilde{\omega}^4 & = & \omega^3 + d_2\omega^4 \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \theta^1 &= \left(\widetilde{\omega}^1 - c_1^{'}\widetilde{\omega}^4\right) \wedge \widetilde{\omega}^3 \\ \theta^2 &= \left(\widetilde{\omega}^2 + c_2^{'}\omega^3\right) \wedge \omega^4 \\ \theta^3 &= \left(a\widetilde{\omega}^1 + b\widetilde{\omega}^2\right) \wedge \left(\alpha\widetilde{\omega}^3 + \beta\widetilde{\omega}^4\right) + c_3^{'}\widetilde{\omega}^3 \wedge \widetilde{\omega}^4. \end{cases}$$

et si on pose

$$\begin{cases} \eta^1 &= \widetilde{\omega}^1 - c_1^{'}\widetilde{\omega}^4 \\ \eta^2 &= \widetilde{\omega}^2 + c_2^{'}\widetilde{\omega}^3 \\ \eta^3 &= \widetilde{\omega}^3 \\ \eta^4 &= \widetilde{\omega}^4 \end{cases}$$

alors, dans la base $\{\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4\}$, **les** $2-$**formes** $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ **s'écrivent :**

$$\begin{cases} \theta^1 &= \eta^1 \wedge \eta^3 \\ \theta^2 &= \eta^2 \wedge \eta^4 \\ \theta^3 &= a\eta^1 \wedge \eta^3 + b\eta^1 \wedge \eta^4 + c\eta^2 \wedge \eta^3 + d\eta^2 \wedge \eta^4 + e\eta^3 \wedge \eta^4 \end{cases}$$

avec b, c, e **non tous nuls car** $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ **sont linéairement indépendantes.**

Remarque III.3 ***Le système*** $\left(\theta^1, \theta^2\right)$ ***est un système symplectique dans*** $\mathbb{R}^4$ ***et le sous espace vectoriel*** $F = \ker\eta^3 \cap \ker\eta^4$ ***est une solution maximale de dimension*** 2.

Corollaire III.2 (i) ***Si*** $(S) = \left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right)$ ***est un système symplectique dans*** $\mathbb{R}^4$ ***tel que toute solution maximale est de dimension*** 2 ***alors il existe une base*** $\{\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4\}$ ***de*** $\mathbb{R}^4$ ***telle que les*** $2-$***formes*** $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ ***s'écrivent :***

$$\begin{cases} \theta^1 &= \eta^1 \wedge \eta^3 \\ \theta^2 &= \eta^2 \wedge \eta^4 \\ \theta^3 &= a\eta^1 \wedge \eta^3 + b\eta^1 \wedge \eta^4 + c\eta^2 \wedge \eta^3 + d\eta^2 \wedge \eta^4 + e\eta^3 \wedge \eta^4 \end{cases}$$

avec b, c, e ***non tous nuls,***
(ii) ***La classification des*** $3-$***systèmes symplectiques*** $(S) = \left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right)$ ***dans*** $\mathbb{R}^4$ ***qui possède une solution maximale de dimension*** 2 ***découle de la classification des*** $2-$***systèmes symplectiques dans*** $\mathbb{R}^4$ ***qui possède une solution maximale de dimension*** 2.

Soient $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ **une base de** $\mathbb{R}^4$ **et** $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ **sa base duale. On a :**

$$\begin{cases} \theta^1 &= a_1\omega^1 \wedge \omega^2 + a_2\omega^1 \wedge \omega^3 + a_3\omega^1 \wedge \omega^4 + a_4\omega^2 \wedge \omega^3 + a_5\omega^2 \wedge \omega^4 + a_6\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 &= b_1\omega^1 \wedge \omega^2 + b_2\omega^1 \wedge \omega^3 + b_3\omega^1 \wedge \omega^4 + b_4\omega^2 \wedge \omega^3 + b_5\omega^2 \wedge \omega^4 + b_6\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^3 &= c_1\omega^1 \wedge \omega^2 + c_2\omega^1 \wedge \omega^3 + c_3\omega^1 \wedge \omega^4 + c_4\omega^2 \wedge \omega^3 + c_5\omega^2 \wedge \omega^4 + c_6\omega^3 \wedge \omega^4. \end{cases}$$

Puisque θ^1, θ^2 **et** θ^3 **sont linéairement indépendantes alors on peut supposer**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Remplaçons dans les expressions précédentes ω^2 **par** $a_1\omega^2 + a_2\omega^3 + a_3\omega^4$, ω^3 **par** $b_1\omega^2 + b_2\omega^3 + b_3\omega^4$, **et** ω^4 **par** $c_1\omega^2 + c_2\omega^3 + c_3\omega^4$ **on obtient :**

$$\begin{cases} \theta^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2 + a_4\omega^2 \wedge \omega^3 + a_5\omega^2 \wedge \omega^4 + a_6\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 &= \omega^1 \wedge \omega^3 + b_4\omega^2 \wedge \omega^3 + b_5\omega^2 \wedge \omega^4 + b_6\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^3 &= \omega^1 \wedge \omega^4 + c_4\omega^2 \wedge \omega^3 + c_5\omega^2 \wedge \omega^4 + c_6\omega^3 \wedge \omega^4 \end{cases}$$

avec $(a_i, b_i, c_i) \neq (0, 0, 0)$ **pour** $i = 4, 5, 6$ **car toute solution maximale de** $\left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right)$ **est de dimension** 1.

Soit $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in \bigcap_{i=1}^{3} A\left(\theta^i\right)$ **alors** X **est une solution des systèmes suivants :**

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - a_4x_3 - a_5x_4 = 0 \\ a_6x_4 = 0 \\ a_6x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ b_5x_4 = 0 \\ x_1 + b_4x_2 - b_6x_4 = 0 \\ b_5x_2 = 0. \end{cases}, \quad \begin{cases} x_4 = 0 \\ c_4x_3 = 0 \\ c_4x_2 = 0 \\ x_1 + c_5x_2 + c_6x_3 = 0 \end{cases}$$

On obtient $\bigcap_{i=1}^{3} A\left(\theta^i\right) = \{0\}$ **et le système est non dégénéré.**

Proposition III.7 ***Si*** $(S) = \left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right)$ ***est un système symplectique dans*** $\mathbb{R}^4$ ***tel que toute solution est de dimension*** 1, ***alors il existe une base*** $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$ ***telle que***

$$\begin{cases} \theta^1 & = & \omega^1 \wedge \omega^2 + a_4\omega^2 \wedge \omega^3 + a_5\omega^2 \wedge \omega^4 + a_6\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 & = & \omega^1 \wedge \omega^3 + b_4\omega^2 \wedge \omega^3 + b_5\omega^2 \wedge \omega^4 + b_6\omega^3 \wedge \omega^4 \\ \theta^3 & = & \omega^1 \wedge \omega^4 + c_4\omega^2 \wedge \omega^3 + c_5\omega^2 \wedge \omega^4 + c_6\omega^3 \wedge \omega^4 \end{cases}$$

avec $(a_i, b_i, c_i) \neq (0,0,0)$ ***pour*** $i = 4, 5, 6.$

IV. REFERENCES

[1] A. Awane, *Sur une généralisation des structures symplectiques*, Thèse Strasbourg (1984).
[2] A. Awane, *k-symplectic structures,* Journal of Mathematical physics 33 (1992) 4046-4052. U.S.A.
[3] A. Awane, *Structures k-symplectiques*, Thèse Mulhouse (1992).
[4] A. Awane. *Generalized polarized manifolds.* A paraître dans Revista Mattemática Complutence. Espagne.
[5] A. Awane, *Systèmes extérieures k-symplectiques*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. Vol 56, 1(1998) 65-80.
[6] A.Awane, A.Chkiriba, M.Goze, E.Azizi et Maimouna Bent Bah. *Vectorial polarize manifolds.* Africain Journal of Mathematical Physics. Volume 4 (2007) 33-43
[7] A. Awane, A.Chkiriba, M.Goze, *k-symplectic affine Lie algebras.* Rendiconti Semanario Facoltà Scienze Università Cgliari. Vol. 74, Fasc. 1-2 (2004)
[8] Awane, M. Goze, *Pfaffian systems, k-symplectic systems.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht / Boston / London (june 2000).
[9] M. De Leon. J. Main-Solano and J. C. Marrero. *A geometrical approach to classical field theories:* A constraint algorithm for singular theories http://www.eco.ub.es/~jmarin/CONFIEL.pdf
[10] Y. Nambu. *Generalized Hamiltonian Dynamics. Physical Review* D , **7**, 8 (15 April 1973).
[11] L.K. Norris, *Symplectic geomery on T^*M derived from n-symplectic geometry on LM,* J. Geometry and Physics 13 (1998), 51-78.
[12] M. Puta, *Some Remarks on the k-symplectic manifolds.* Tensors.109-115.