African Journal Of Mathematical Physics Volume **6** (2008) 87-91

A propos des Symétries de l'Equation $u_{tt} - (f(u_x))_x = 0$

A. Ouhadan[1,2], E.H. El Kinani[1−2], M. Rahmoune[2,3], A. Awane[4]

1. *Groupe d'Agèbre et Applications, Fac Sciences et Techniques, Errachidia, Morocco*
2. *UFR Sciences de l'ingénieur, Fac Sciences et Techniques, Errachidia,Morocco*
3. *Ecole Supérieure de Technologie Meknès, Morocco.*
4. *Equipe de Géométrie différentielle et Applications, Fac Sciences, Ben M'sik, Casablanca*

Received 26 February 2007; accepted 7 October 2007 ; availiable online 2 February 2008

abstract

Dans ce travail nous étudions la classification de l'équation $u_{tt} - (f(u_x))_x = 0$. Nous montrons que si la fonction f n'est pas une fonction affine, l'équation n'admet pas de symétries potentielles. Par contre, si f est une fonction affine, la solution du système déterminant les symétries est obtenue. Par suite l'équation étudiée possède bien des symétries de type potentielles.

I. INTRODUCTION

Considérons une équation aux dérivées partielles $R(x, t, u)$ qui peut s'écrire sous la forme conservative et soit $S(x, t, u, v)$ le système auxiliaire associé. Alors toute solution $(u(x, t), v(x, t))$ de $S(x, t, u, v)$ définit une solution $u(x, t)$ de $R(x, t, u)$. A toutes solutions $u(x, t)$ correspond un potentiel $v(x, t)$ telle que $(u(x, t), v(x, t))$ est solution de $S(x, t, u, v)$. Si on arrive à déterminer une symétrie de $S(x, t, u, v)$, celle-ci transformera une solution de ce système en une autre solution. Par conséquent, elle induit une symétrie pour l'équation $R(x, t, u)$, une telle symétrie est dite non-locale ou potentielles si les coefficients des générateurs dépendent explicitement du potentiel $v(x, t)$.
Dans ce travail on va aborder le problème de classification selon la nature de la fonction f de l'équation :

$$u_{tt} - f^{'}(u_x)u_{xx} = 0, \tag{1.1}$$

où f est une fonction quelconque de u_x.

II. SYMÉTRIES POTENTIELLES DE (1.1)

Comme l'équation (1.1) qu'on note $R(x, t, u)$ peut s'écrie sous la forme conservative suivante :

$$(u_t)_t - (f(u_x))_x = 0, \tag{2.1}$$

alors le système auxiliaire $S(x, t, u, v)$ associé à l'équation (1.1) est donné par :

$$\begin{cases} v_t = & f(u_x), \\ v_x = & u_t, \end{cases} \tag{2.2}$$

La recherche des symétries potentielles de $R(x,t,u)$ passe par la recherche des symétries ponctuelles de son système auxiliaire $S(x,t,u,v)$.

A. Critère d'invariance de $S(x,t,u,v)$

Dans cette section, nous détérminerons les symétries ponctuelles de $S(x,t,u,v)$.Pour ce faire, considération le groupe de transformations suivants :

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x+\epsilon\xi(x,t,u,v)+O(\epsilon^2),\\ \tilde{t} &= t+\epsilon\eta(x,t,u,v)+O(\epsilon^2),\\ \tilde{u} &= u+\epsilon\varphi(x,t,u,v)+O(\epsilon^2),\\ \tilde{v} &= v+\epsilon H(x,t,u,v)+O(\epsilon^2),\end{aligned} \tag{2.3}$$

où ϵ désigne le groupe à un paramètre. Le générateur associé à ce groupe de transformation est donné par

$$V=\xi(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial t}+\varphi(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial u}+H(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{2.4}$$

où $\xi(x,t,u,v),\eta(x,t,u,v),\varphi(x,t,u,v)$ et $H(x,t,u,v)$ sont des fonctions de (x,t,u,v) à dt́erminer.
Alors il faut que les transformations (2.3) laissent invariant l'ensemble des solutions du système (2.2). Un générateur de la forme (2.4) définit une symétrie de système (2.2) ssi il vérifie le critère d'invariance soit :

$$Pr^{(1)}V(\Delta_i, i=1,2)_{/\Delta_i=0,i=1,2}=0, \tag{2.5}$$

où $\qquad \Delta_1=v_t-f(u_x), \qquad \Delta_2=v_x-u_t$ et $Pr^{(1)}V$ est le prolongement d'ordre 1 de V donné par la formule suivante :

$$Pr^{(1)}V=V+\varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t}+\varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x}+H^x\frac{\partial}{\partial v_x}+H^t\frac{\partial}{\partial v_t},$$

où

$$\begin{aligned}\varphi^t &= D_t(\varphi-\xi u_x-\eta u_t)+\xi u_{tx}+\eta u_{tt},\\ \varphi^x &= D_x(\varphi-\xi u_x-\eta u_t)+\xi u_{xx}+\eta u_{xt},\\ H^x &= D_x(H-\xi v_x-\eta v_t)+\xi v_{xx}+\eta v_{xt},\\ H^t &= D_t(H-\xi v_x-\eta v_t)+\xi v_{tx}+\eta v_{tt}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Par conséquent le critère (2.5) est équivalent à

$$\begin{cases} H^x-\varphi^t &= 0,\\ H^t-\varphi^x f'(u_x) &= 0.\end{cases} \tag{2.7}$$

B. Le système déterminant les symétries du système (2.2)

La substitution des expressions de φ^t,φ^x,H^t et H^x dans le système précédent nous conduit au système suivant :

$$H_x-\varphi_t=0, \tag{2.8}$$

$$H_v-\xi_x-\varphi_u+\eta_t=0, \tag{2.9}$$

$$\eta_u-\xi_v=0, \tag{2.10}$$

$$(H_u+\xi_t)u_x+(-\eta_x-\varphi_v)f(u_x)=0, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}H_t+(H_u-\xi_t)v_x-\xi_u v_x^2+(-\xi_v-\eta_u)v_x f(u_x)&+\\ (-\varphi_v+\eta_x)v_x f'(u_x)-\eta_v f^2(u_x)+(\xi_v+\eta_u)u_x v_x f'(u_x)&+\\ (-\varphi_u+\xi_x)u_x f'(u_x)+\eta_v v_x^2 f'(u_x)+\xi_u u_x^2 f'(u_x)&+\\ (H_v-\eta_t)f(u_x)-\varphi_x f'(u_x)&=0.\end{aligned} \tag{2.12}$$

La résolution d'un tel système permet la détermination de la forme générale d'un générateur qui appartient à l'algèbre associée au groupe de symétrie de système (2.2).

C. Condition de symétrie potentielle

Un générateur de la forme (2.4) définit une symétrie potentielle pour (1.1) si les coefficients ξ, η et φ vérifient la condition :

$$(\frac{\partial \xi}{\partial v})^2 + (\frac{\partial \eta}{\partial v})^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial v})^2 \neq 0. \tag{2.13}$$

Cas.1 : $f^{''} \neq 0$
Montrons que dans ce cas (2.13) n'est pas vérifiée

$$\frac{\partial^2(13)}{\partial v_x^2} = 0, \qquad \Longrightarrow \xi_u = \eta_v = 0,$$

$$\frac{\partial^2(12)}{\partial u_x^2} = 0, \qquad \Longrightarrow \varphi_v = -\eta_x,$$

$$\frac{\partial^2(13)}{\partial u_x \partial v_x} = 0, \qquad \Longrightarrow -\varphi_v + \xi_v u_x = 0,$$

$$\frac{\partial^3(13)}{\partial u_x^2 \partial v_x} = 0, \qquad \Longrightarrow \varphi_v = \xi_v = 0,$$

d'où la condition (2.13) n'est pas vérifiée. Par conséquent les fonction ξ, η et φ ne dependent pas explicitement de v ce qui signifie que si f n'est pas une fonction affine, alors l'équation (1.1) ne peut pas admettre des symétries potentielles.

Cas2 : $f^{''} = 0$
Dans ce cas le système constitué des équations (2.8)-(2.12) devient :

$$H_x - \varphi_t = 0, \tag{2.14}$$
$$H_v - \xi_x - \varphi_u + \eta_t = 0, \tag{2.15}$$
$$\eta_u - \xi_v = 0, \tag{2.16}$$
$$H_u + \xi_t - a(\eta_x + \varphi_v) = 0, \tag{2.17}$$
$$b(\eta_x + \varphi_v) = 0, \tag{2.18}$$
$$a\eta_v - \xi_u = 0, \tag{2.19}$$
$$H_u - \xi_t + a(\eta_x - \varphi_v) = 0, \tag{2.20}$$
$$-2ab\eta_v + a(\xi_x - \varphi_u) + a(H_v - \eta_t) = 0, \tag{2.21}$$
$$H_t - b(\xi_v + \eta_u) - \eta_v b^2 + b(H_v - \eta_t) - a\varphi_x = 0. \tag{2.22}$$

On va s'intéresser au cas où $ab \neq 0$, pour le cas $a = 0$, voir [1,6].

L'équation (2.18), entraîne $\varphi_v = -\eta_x$, et à partir des équations (2.17) et (2.20) on déduit que : $H_u = -a\eta_x$ et $\xi_t = a\eta_x$. Puisque, notre but est de déterminer une solution du système ci-dessus, et qui vérifie en plus la condition (2.13), alors on suppose que les fonctions ξ et η sont de la forme suivante :

$$\xi = \xi(x, t), \qquad \eta = \eta(x, t).$$

Les symétries obtenues en imposant aux coefficients ξ et η d'être uniquement des fonctions des variables indépendantes x et t sont appelées les symétries projectives.

La recherche des symétries projectives pour le système (2.2) conduit aux système suivant :

$$H_x - \varphi_t = 0, \tag{2.23}$$
$$H_v - \xi_x - \varphi_u + \eta_t = 0, \tag{2.24}$$
$$H_u + \xi_t = 0, \tag{2.25}$$
$$H_u - \xi_t + 2a\eta_x = 0, \tag{2.26}$$
$$\xi_x - \varphi_u) + H_v - \eta_t = 0, \tag{2.27}$$
$$H_t + b(H_v - \eta_t) - a\varphi_x = 0. \tag{2.28}$$

Il en résulte de l'équation (2.25) que : $H_{uu} = 0$, par suite, on a :

$$H = A(x,t,v)u + B(x,t,v),$$

avec A et B des fonctions à déterminer.

Les équations (2.25) et (2.26) entraînent que : $A = A(x,t)$, or on sait que $\xi_t = a\eta_x$, et comme $H_u = A(x,t) = \xi_t - 2a\eta_x$, on obtient que :

$$H = -a\eta_x u + B(x,t,v).$$

L'analyse des équations (2.24) et (2.27) conduit, à : $H_v = \varphi_u$, par suite, $\xi_x = \eta_t$.

Puisque, $\varphi_v = -\eta_x$, alors $H_{vv} = \varphi_{uv} = -\eta_{xv} = 0$. Par conséquent,

$$B(x,t,v) = B_1(x,t)v + B_2(x,t),$$

où $B_i, i = 1,2$ sont des fonctions qui ne dépendent que de x et t. De l'équation (2.24) et en tenant compte de la relation $H_{vu} = 0$, on a : $\varphi_{uu} = 0$, or $H_v = \varphi_u$, ce qui permet d'obtenir que :

$$\varphi = B_1(x,t)u - \eta_x v + D_1(x,t),$$

pour une certaine fonction $D_1(x,t)$. En utilisant les expressions obtenues de H et φ, avec les équations restantes (2.23) et (2.28), on trouve que :

$$\begin{array}{ll} \eta_{xt} + B_{1x} = 0, & a\eta_{xx} + B_{1t} = 0, \\ B_{2t} + b(B_1 - \eta_t) - aD_{1x} = 0, & B_{2x} - D_{1t} = 0. \end{array}$$

L'équation (1.1) admet des symétries potentielles si la condition (2.13) est vérifiée. Comme on a supposé que $\xi = \xi(x,t)$ et $\eta = \eta(x,t)$, alors d'après la relation $\varphi_v = -\eta_x$, la condition (2.13) devient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq 0,$$

ce qui est équivalent à :

$$\eta_x \neq 0.$$

En posant : $\eta(x,t) = x$, et d'après les relations : $\xi_t = a\eta_x$ et $\xi_x = \eta_t$, on obtient que :

$$\eta(x,t) = x, \qquad \xi(x,t) = at + k_1,$$

où k_1 est une constante arbitraire. Pour obtenir une solution de système d'équations (2.23)-(2.28) on peut choisir les fonctions B_1, B_2 et D_1 de la manière suivante :

$$B_1(x,t) = 0, \qquad B_2(x,t) = k_2, \qquad D_1(x,t) = k_3,$$

pour k_2 et k_3 des constantes arbitraires. Par conséquent, une solution de système est obtenue, et elle est de la forme suivante :

$$\xi(x,t,u,v) = at + k_1,$$
$$\eta(x,t,u,v) = x,$$
$$\varphi(x,t,u,v) = -v + k_1$$
$$H(x,t,u,v) = -au + k_2.$$

Cette solution permet de conclure que les opérateurs :

$$V_1 = (at+1)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t} + (1-v)\frac{\partial}{\partial u} - au\frac{\partial}{\partial v},$$
$$V_2 = at\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial u} + (1-au)\frac{\partial}{\partial v},$$

sont des générateurs infinitésimaux d'un groupe de symétries ponctuelles pour le système (2.2), et que les opérateurs :

$$V_1 = (at+1)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t} + (1-v)\frac{\partial}{\partial u},$$
$$V_2 = at\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial u},$$

définissent bien des symétries potentielles de l'équation (1.1). De telles symétries sont caractérisées par le fait que l'un au moins des coefficients ξ, η ou φ dépend explicitement de potentiel v.

III. CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons étudié la classification de l'equation $u_{tt} - (f(u_x))_x = 0$. Nous avons montré que si la fonction f n'est pas une fonction affine, alors l'équation n'admet pas des symétries potentielles. Par contre si f l'est, alors deux générateurs infinitésimaux des symétries potentielles sont déterminés.

IV. REFERENCES

[1] Olver P.J, Application of Lie groups to Differential Equations, Springer, New York 1986.
[2] Bluman G.W and Kumei, Symmetries and Differentials Equa tions, Springer, New York 1989.
[3] Ibragimov N.H, CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equation, CRC Press, Boca Raton, 1986.
[4] Rodríguez M.A. and Winternitz. P, J.PhysA:Maths.Gen 37(2004) and the references quoted therien.
[5] Lie S and Engel F, Theories der Tranformation gruppen Vol.39 (Leipzig Teubner) 1890.
[6] G. Bluman., Connections Between Symmetries and Conservation Laws, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, Vol. 1(2005).