



Sur Les Opérateurs de Gel'fand

S. Kabbaj, A. Akhlidj

Département de Mathématiques et Informatique,
Faculté des Sciences, Université Ibn Tofa il-Kénitra, Morocco.
E-mail: samkabbaj@yahoo.fr

Abstract

Dans ce travail, nous donnons une nouvelle approche visant la généralisation de la théorie des paires de Gel'fand et celle des mesures de Gel'fand. Cette approche constitue une continuation naturelle des travaux inaugurés par M. Akkouchi ([2], [3]), M. Ait Sibaha [1], A. Bakali ([4], [5]), B. Bouykhaleh [5], S. Kabbaj [15] et ELH. EL Qorachi [11].

I. NOTATIONS ET OBJECTIFS

Dans tout ce qui suit G désigne un groupe topologique localement compact non nécessairement commutatif, e son élément unité, m_G sa mesure de Haar (normalisée si le groupe est compact), Δ sa fonction module, $L^1(G)$ désigne l'algèbre des fonctions de G à valeurs complexes, m_G -intégrables; $L^\infty(G)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes m_G bornées, $M^1(G)$ désigne l'algèbre des mesures bornées; P désigne un opérateur de $L^1(G)$ dans $L^1(G)$, P^* un opérateur défini à partir de P de $L^\infty(G)$ dans $L^\infty(G)$ et \tilde{P} un opérateur défini à partir de P de $M^1(G)$ dans $M^1(G)$; $L_P^1(G)$ désigne l'ensemble des fonctions appartenant à $L^1(G)$ P -invariantes; $L_{P^*}^\infty(G)$ désigne l'ensemble des fonctions complexes appartenant à $L^\infty(G)$ P^* -invariantes; $C^b(G)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions complexes continues et bornées, $C_{P^*}^b(G)$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, continues, bornées et P^* -invariantes; $C^0(G)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, continues, tendant vers zéro à l'infini et $C_{P^*}^0(G)$ désigne l'ensemble des fonctions complexes appartenant à $C^0(G)$ et P^* -invariantes; $K(G)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, continues à support compact; $K_P(G)$ désigne l'ensemble des fonctions appartenant à $K(G)$ et P -invariantes; $M_{\tilde{P}}^1(G)$ l'ensemble des mesures bornées et \tilde{P} -invariantes. Pour tout $f \in L^1(G)$ on pose $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$; $\check{f}(x) = f(x^{-1})$; $\tilde{f}(x) = \overline{\check{f}(x)} = \overline{f(x^{-1})}$ et $f^*(x) = \Delta(x^{-1})\tilde{f}(x)$ pour tout $x \in G$.

Dans ce travail, nous donnons une nouvelle approche, qui constitue une continuation naturelle des travaux inaugurés par M. Akkouchi ([2], [3]), M. Ait Sibaha [1], A. Bakali ([4], [5]), B. Bouykhaleh [5], S. Kabbaj [15] et ELH. EL Qorachi [11]. Et ce, dans la perspective, de généraliser la théorie des paires de Gel'fand [12] et celle des mesures de Gel'fand ([2], [4]). Ainsi, pour ce faire, nous avons introduit un nouveau concept mathématique que nous appelons "opérateur de Gel'fand" noté par P , et par lequel nous construisons une nouvelle sous-algèbre de $L^1(G)$, qu'on note par $L_P^1(G)$, et sur laquelle nous projetons la théorie des algèbres de Banach involutive ([8], [9]) et nous abordons certains problèmes fondamentaux de l'analyse harmonique ([1], [2], [12], [13]), nous citons par exemples:

- Les formes positives continues sur $L_P^1(G)$, la notion de fonctions de type P -positif et leurs propriétés fondamentales.

- La notion de fonctions P -sphériques.
 - Le lien entre les fonctions de type P -positif et les représentations de G .
 - Le lien entre les représentations de G et les représentations non dégénérées de l'algèbre $L^1_P(G)$ et l'introduction de la notion des P -représentations sur G .
 - Le lien entre les P -représentations de G et les représentations non dégénérées de l'algèbre $L^1_P(G)$.
 - Le lien entre les fonctions de type P -positif et les P -représentations de G .
 - La notion de fonctions P -sphériques et leurs propriétés fondamentales.
 - La détermination des caractères de l'algèbre $L^1_P(G)$ qu'on note par $\sum_P(G)$.
- Enfin, ce travail nous permet d'envisager en perspective la définition de la transformée de Fourier de $L^1_P(G)$ dans $C^0(\sum_P(G))$, le théorème de Bochner-Godement et le théorème de Plancherel-Godement.

II. OPÉRATEURS DE GEL'FAND

Lemme (1-1)

- i) Soient E un \mathbb{k} -espace vectoriel où $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et P un endomorphisme de E tel que $P \circ P = P$. Alors, $P(E) = \{x \in E / P(x) = x\}$.
Et, si E est normé et $P \in L_\infty(E)$ alors, $P(E)$ est fermé dans E . Notons par la suite $P(E)$ par E_P .
- ii) Soient E et F deux \mathbb{k} -espaces vectoriels normés où $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times F \rightarrow \mathbb{k}$ une forme bilinéaire non dégénérée et $P \in L_\infty(E)$. Alors, il existe un et seul opérateur $P^* \in L_\infty(F)$ qui vérifie $\langle P(x), y \rangle = \langle x, P^*(y) \rangle$ pour tout $x \in E$ et $y \in F$.
- iii) Dans les mêmes conditions que ii), si $P \circ P = P$ alors, $P^* \circ P^* = P^*$ et l'application j définie de $(E_P)'$ dans F_{P^*} par $j = P^* \circ S^{-1} \circ ({}^tP)$ est un isomorphisme d'espace vectoriels només, où S est l'isomorphisme défini de F sur E' déduit de la dualité entre E et F . Autrement dit la restriction de la forme bilinéaire non dégénérée sur $E \times F$ reste une forme bilinéaire non dégénérée sur $E_P \times F_{P^*}$ et $(E_P)' \simeq F_{P^*}$.

Théorème (1-2)

Soient G un groupe topologique localement compact, $P : L^1(G) \rightarrow L^1(G)$ une application vérifiant les conditions suivantes

- i) P est \mathbb{C} -linéaire continue relativement à la topologie de la norme $\|\cdot\|_1$,
- ii) $P \circ P = P$,
- iii) pour tout élément $f \in L^1(G)$, $P(f^*) = (P(f))^*$,
- iv) pour tout élément $f, g \in L^1(G)$ on a $P(f) * P(g) = P(f * P(g)) = P(P(f) * g)$,
- v) pour tout élément $f \in K(G)$, on a $P^*(f) \in C^b(G)$.

Alors:

- 1) L'espace $L^1_P(G)$ est une sous algèbre de Banach involutive de $(L^1(G), +, \cdot, *, \|\cdot\|_1)$ admettant une unité approchée et $(L^1_P(G))' \simeq L^\infty_{P^*}(G)$.
- 2) On définit une application $\tilde{P} : M^1(G) \rightarrow M^1(G)$ par, $\langle \tilde{P}(\mu), f \rangle = \langle \mu, P^*(f) \rangle, \forall \mu \in M^1(G)$ et $f \in K(G)$; qui vérifie les propriétés suivantes:
 - a) \tilde{P} est \mathbb{C} -linéaire continue relativement à la topologie de la norme usuelle et relativement à la topologie vague,
 - b) pour tout élément $f \in L^1(G)$ on a $\tilde{P}(f m_G) = P(f) m_G$,
 - c) $\tilde{P} \circ \tilde{P} = \tilde{P}$,
 - d) $\tilde{P}(\mu^*) = (\tilde{P}(\mu))^*, \forall \mu \in M^1(G)$,
 - e) pour tout élément $\mu, v \in M^1(G)$ on a $\tilde{P}(\mu) * \tilde{P}(v) = \tilde{P}(\mu * \tilde{P}(v)) = \tilde{P}(\tilde{P}(\mu) * v)$,
 - f) l'espace $M^1_P(G)$ est une sous-algèbre de Banach involutive de $(M^1(G), +, \cdot, *, \|\cdot\|)$,
 - g) l'espace $B = \{P(f) m_G / f \in L^1(G)\}$ est vaguement dense dans $M^1_P(G)$.
 - h) Si pour tout élément $f \in C^0(G)$ on a $P^*(f) \in C^0(G)$. Alors, $(\tilde{P})^* = P^*$ et $(M^1_P(G))' \simeq C^0_{P^*}(G)$.

Définition(1-3)

Soient G un groupe topologique localement compact et $P : L^1(G) \rightarrow L^1(G)$ un opérateur vérifiant les conditions suivantes:

- 1) P est \mathbb{C} -linéaire continue relativement à la topologie de la norme $\|\cdot\|_1$.
- 2) $P \circ P = P$,

- 3) pour tout élément $f \in L^1(G)$, $P(f^*) = (P(f))^*$,
- 4) pour tout élément $f, g \in L^1(G)$ on a $P(f) * P(g) = P(f * P(g)) = P(P(f) * g)$,
- 5) pour tout élément $f \in K(G)$, on a $P^*(f) \in C^b(G)$.

Alors, l'opérateur P est dit de Gel'fand, si et seulement si, l'algèbre $L^1_P(G)$ est commutative.

Proposition (1-4)

Soient G un groupe topologique localement compact, K un sous-groupe compact de G , ω_K la mesure de Haar normalisée de K , χ un caractère unitaire de K et les opérateurs $P_{K \times K}$, P_K et P_χ sont définis de $L^1(G)$ dans $L^1(G)$ par:

- a) $P_{K \times K}(f)(x) = \int_K \int_K f(kxh) d\omega_K(k) d\omega_K(h)$,
- b) $P_K(f)(x) = \int_K f(kxk^{-1}) d\omega_K(k)$,
- c) $P_\chi(f)(x) = \int_K \int_K f(kxh) \bar{\chi}(k) \chi(h) d\omega_K(k) d\omega_K(h)$.

Alors on a:

- i) Les opérateurs $P_{K \times K}$, P_K et P_χ satisfont les cinqs conditions de la définition (1-3).
- ii) $L^1_{P_{K \times K}}(G) = L^1(G//K)$, où $L^1(G//K)$ est l'algèbre des fonctions à valeurs complexes K -biinvariantes.
- iii) $L^1_{P_K}(G) = L^1_K(G)$, où $L^1_K(G)$ est l'algèbre des fonctions à valeurs complexes K -centrales.
- iv) $L^1_{P_\chi}(G) = L^1_{\mu_\chi}(G)$, où $L^1_{\mu_\chi}(G) = \mu_\chi * L^1(G) * \mu_\chi$ est l'algèbre des fonctions à valeurs complexes de classe χ , $\mu_\chi = (\bar{\chi}\omega_K)^\sharp$ et $(\bar{\chi}\omega_K)^\sharp$ est la mesure définie sur G par $\langle (\bar{\chi}\omega_K)^\sharp, f \rangle = \langle \bar{\chi}\omega_K, f|_K \rangle \forall f \in K(G)$.

Remarques (1-5)

- 1) L'assertion ii) nous permet de déduire que la notion d'opérateur de Gel'fand généralise les paire de Gel'fand [12].
- 2) L'assertion iii) nous permet de déduire que la notion d'opérateur de Gel'fand généralise les paires K -centrales [5].
- 3) L'assertion iv) nous permet de déduire que la notion d'opérateur de Gel'fand généralise Le travail de Takahashi sur l'algèbre des fonctions de classe χ établies voir [2].
- 4) Les opérateurs $(P_{K \times K})^*$, $(P_K)^*$ et $(P_\chi)^*$ ont les mêmes expressions de $L^\infty(G)$ dans $L^\infty(G)$.

Proposition (1-6)

Soient G un groupe topologique localement compact, K un groupe compact opérant par automorphisme sur G tel que la fonction module Δ de G est K -invariante. Alors on a:

- i) L'opérateur défini de $L^1(G)$ dans $L^1(G)$ par

$$P_K(f)(x) = \int_K f(k \cdot x) d\omega_K(k) \forall f \in L^1(G) \text{ et } \forall x \in G$$

où, $k \cdot x$ est l'action de K sur G ; vérifie les cinqs conditions de la définition (1-3).

- ii) $L^1_{P_K}(G) = L^1_K(G)$ où $L^1_K(G)$ est l'algèbre des fonctions complexes K -invariantes ou K -centrales généralisées [15].

Remarque (1-7)

- 1) L'assertion ii) nous permet de déduire que la notion d'opérateur de Gel'fand généralise les paires K -centrales généralisées [15].
- 2) L'opérateur $(P_K)^*$ possède la même expression de $L^\infty(G)$ dans $L^\infty(G)$.

Proposition (1-8)

Soient G un groupe topologique localement compact, μ une mesure bornée telle que $\mu^* = \mu = \mu * \mu$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) μ est une mesure de Gel'fand,
- ii) L'opérateur

$$P_\mu : L^1(G) \longrightarrow L^1(G) \\ f \longmapsto \mu * f * \mu$$

est de Gel'fand.

Preuve

L'opérateur P_μ vérifie les cinqs conditions de la définition (1-3) voir ([1], [2], [4]) et $L^1_{P_\mu}(G) = L^1_\mu(G)$ où $L^1_\mu(G) = \mu * L^1(G) * \mu$. D'où l'équivalence. ■

Remarque (1-9)

1) La proposition (1-8) nous permet de déduire que la notion d'opérateur de Gel'fand généralise aussi la notion des mesures de Gel'fand établies par les auteurs, A. Bakali et M. Akkouchi ([2], [4]).

2) L'opérateur $(P_\mu)^*$ est défini de $L^\infty(G)$ dans $L^\infty(G)$ par $(P_\mu)^*(\varphi)(x) = \int_G \int_G \varphi(sxt) d\mu(s) d\mu(t)$.

Théorème (1-10)

Soient G un groupe topologique localement compact, $P : L^1(G) \rightarrow L^1(G)$ un opérateur vérifiant les cinq conditions de la définition (1-3). Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- a) P est un opérateur de Gel'fand.
- b) $M_{\tilde{P}}^1(G)$ est commutative.
- c) Pour tout $x, y \in G$ on a $\tilde{P}(\delta_x) * \tilde{P}(\delta_y) = \tilde{P}(\delta_y) * \tilde{P}(\delta_x)$.

Lemme (1-11)

Soient G un groupe topologique localement compact, $P : L^1(G) \rightarrow L^1(G)$ un opérateur vérifiant les cinq conditions de la définition (1-3). Alors, pour tout $x, y \in G$ et $f \in K(G)$ on a l'égalité

$$\langle \tilde{P}(\delta_x) * \tilde{P}(\delta_y), f \rangle = P^*(L_{x^{-1}}(P^*(f)))(y).$$

Preuve du théorème

a) \implies b) l'algèbre $L_P^1(G)$ est commutative, donc, pour tout élément $f, g \in L^1(G)$ nous avons $P(f) * P(g) = P(g) * P(f)$, par suite, $P(f)m_G * P(g)m_G = P(g)m_G * P(f)m_G$. Ou encore,

$$\tilde{P}(fm_G) * \tilde{P}(gm_G) = \tilde{P}(gm_G) * \tilde{P}(fm_G).$$

Comme, l'espace $A = \{fm_G / f \in L^1(G)\}$ est vaguement dense dans $M^1(G)$ et les applications \tilde{P} et le produit de convolution sont vaguement continues alors, on déduit que pour tout élément $\mu, \nu \in M^1(G)$, $\tilde{P}(\mu) * \tilde{P}(\nu) = \tilde{P}(\nu) * \tilde{P}(\mu)$, donc, $M_{\tilde{P}}^1(G)$ est commutative.

b) \implies a) Soient $f, g \in L^1(G)$ on a $\tilde{P}(fm_G) * \tilde{P}(gm_G) = \tilde{P}(gm_G) * \tilde{P}(fm_G)$, ou autrement dit,

$$P(f)m_G * P(g)m_G = P(g)m_G * P(f)m_G,$$

ce qui entraîne que $(P(f) * P(g))m_G = (P(g) * P(f))m_G$ comme, l'application

$$j : L^1(G) \rightarrow L^1(G) \\ f \mapsto fm_G$$

est injective alors, on déduit que $P(f) * P(g) = P(g) * P(f)$. D'où, $L_P^1(G)$ est commutative.

b) \implies c) c'est une implication évidente.

c) \implies b) Soient $\mu, \nu \in M^1(G)$ et $f \in K(G)$ nous avons:

$$\langle \tilde{P}(\mu) * \tilde{P}(\nu), f \rangle = \int_G \int_G P^*(L_{x^{-1}}(P^*(f)))(y) d\nu(y) d\mu(x),$$

d'après le lemme (1-11), nous avons l'égalité $P^*(L_{x^{-1}}(P^*(f)))(y) = \langle \tilde{P}(\delta_x) * \tilde{P}(\delta_y), f \rangle$. Donc, on déduit que,

$$\langle \tilde{P}(\mu) * \tilde{P}(\nu), f \rangle = \int_G \int_G \langle \tilde{P}(\delta_x) * \tilde{P}(\delta_y), f \rangle d\nu(y) d\mu(x),$$

et comme on a par hypothèse $\tilde{P}(\delta_x) * \tilde{P}(\delta_y) = \tilde{P}(\delta_y) * \tilde{P}(\delta_x)$, alors on conclut que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{P}(\mu) * \tilde{P}(\nu), f \rangle &= \int_G \int_G \langle \tilde{P}(\delta_y) * \tilde{P}(\delta_x), f \rangle d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \langle \tilde{P}(\nu) * \tilde{P}(\mu), f \rangle \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition (1-12)

Soient G un groupe topologique localement compact, θ un automorphisme de G involutif ie $\theta^2 = id_G$ et $P : L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$ un opérateur linéaire vérifiant les cinq conditions de la définition (1-3). Alors,

- i) pour tout $f \in L^1(G)$ on a $\int_G f \circ \theta(x) dm_G(x) = \int_G f(x) dm_G(x)$,
- ii) $\Delta \circ \theta = \Delta$,
- iii) pour tout $f, g \in L^1(G)$ on a $(f * g)^\theta = f^\theta * g^\theta$,
- iv) l'application

$$\begin{aligned} \Psi : L^1(G) &\longrightarrow L^1(G) \\ f &\longmapsto f^\theta \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres isométrique et involutif,
v) l'opérateur $P^\theta = \Psi \circ P \circ \Psi$ donné par

$$\begin{aligned} P^\theta : L^1(G) &\longrightarrow L^1(G) \\ f &\longmapsto P(f \circ \theta) \circ \theta \end{aligned}$$

vérifie les cinq conditions de la définition (1-3),
vi) la restriction de l'application Ψ donnée par

$$\begin{aligned} \Psi : L_{P^\theta}^1(G) &\longrightarrow L_P^1(G) \\ f &\longmapsto f^\theta \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres isométrique et involutif. Par conséquent, l'opérateur P est de Gel'fand, si et seulement si, P^θ l'est aussi.

Preuve

Les assertions i), ii), iii) et iv) voir [2].

iv) D'après i) l'application Ψ est bien définie, en effet, si $f \in L^1(G)$ on a

$$\begin{aligned} \int_G |f^\theta(x)| dm_G(x) &= \int_G |f \circ \theta(x)| dm_G(x) \\ &= \int_G (|f| \circ \theta)(x) dm_G(x) \\ &= \int_G |f|(x) dm_G(x) \end{aligned}$$

donc, $f \in L^1(G)$ est équivalent à $f^\theta \in L^1(G)$. L'application Ψ est évidemment \mathbb{C} -linéaire bijective et $\|f^\theta\|_1 = \|f\|_1$ et d'après, iii) Ψ est un isomorphisme d'algèbres. Pour tout $f \in L^1(G)$ on a

$$\begin{aligned} \Psi(f^*) &= f^* \circ \theta \\ &= (\check{\Delta} \tilde{f}) \circ \theta \\ &= (\check{\Delta} \circ \theta) (\tilde{f} \circ \theta) \\ &= \check{\Delta} \widetilde{f \circ \theta} \\ &= (f^\theta)^* \\ &= (\Psi(f))^* , \end{aligned}$$

d'où, Ψ est un isomorphisme d'algèbre isométrique et involutif.

- v) L'opérateur P^θ vérifie les cinq conditions de la définition (1-2). En effet:
 - nous avons $P^\theta = \Psi \circ P \circ \Psi$ donc, P^θ est un opérateur \mathbb{C} -linéaire continu.
 - Comme $\Psi^2 = id_{L^1(G)}$ et $\theta^2 = id_G$, on a évidemment $P^\theta \circ P^\theta = P^\theta$.
 - Pour tout $f \in L^1(G)$ on a

$$\begin{aligned} P^\theta(f^*) &= \Psi \circ P \circ \Psi(f^*) \\ &= (P^\theta(f))^* , \end{aligned}$$

car, les opérateurs P et Ψ sont involutifs.

- Pour tout $f, g \in L^1(G)$ on a:

$$\begin{aligned} P^\theta(f) * P^\theta(g) &= \Psi \circ P \circ \Psi(f) * \Psi \circ P \circ \Psi(g) \\ &= \Psi \circ (P \circ \Psi(f) * P \circ \Psi(g)) \\ &= \Psi(P(\Psi(f)) * P(\Psi(g))) \\ &= \Psi \circ P(\Psi(f) * P \circ \Psi(g)) \\ &= \Psi \circ P(\Psi(f) * \Psi^2 \circ P \circ \Psi(g)) \\ &= \Psi \circ P \circ \Psi(f * \Psi \circ P \circ \Psi(g)) \\ &= P^\theta(f * P^\theta(g)) . \end{aligned}$$

- Soit $f \in K(G)$ on a évidemment que $(P^\theta)^*(f) = \Psi^* \circ P^* \circ \Psi^*(f)$ et comme $\Psi^*(f) = f^\theta$, on déduit facilement que, $(P^\theta)^*(f) = (P^*(f^\theta))^\theta \in C^b(G)$.

vi) Montrons que la restriction de l'application Ψ de $L^1_{P^\theta}(G)$ dans $L^1_P(G)$ est bien définie. Soit $f \in L^1_{P^\theta}(G)$ on a

$$\begin{aligned} P(f^\theta) &= P(f^\theta) \circ \theta^2 \\ &= P^\theta(f) \circ \theta \\ &= f^\theta , \end{aligned}$$

donc, $f^\theta \in L^1_P(G)$. Ψ est évidemment \mathbb{C} -linéaire, continue, injective et involutive. De même, il est facile de vérifier que Ψ est surjective et pour tout $f, g \in L^1_{P^\theta}(G)$ on a $\Psi(f * g) = \Psi(f) * \Psi(g)$. D'où, Ψ est un isomorphisme d'algèbres isométrique involutif. Par conséquent, l'opérateur P est de Gel'fand, si et seulement si, P^θ l'est aussi. ■

Proposition (1-13)

Soient G un groupe topologique localement compact, θ un anti-automorphisme involutif de G (ie pour tout $x, y \in G$, $\theta(xy) = \theta(y)\theta(x)$ et $\theta^2 = id_G$) et $P : L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$ un opérateur linéaire vérifiant les cinq conditions de la définition (1-3). Alors,

i) pour tout $f \in L^1(G)$ on a

$$\begin{aligned} \int_G f \circ \theta(x) dm_G(x) &= \int_G f(x) \check{\Delta}(x) dm_G(x) \\ &= \int_G \check{f}(x) dm_G(x) , \end{aligned}$$

ii) $\Delta \circ \theta = \check{\Delta}$,

iii) pour tout $f, g \in L^1(G)$ on a $(f * g)^\theta = g^\theta * f^\theta$,

iv) l'application

$$\begin{aligned} \Phi : L^1(G) &\longrightarrow L^1(G) \\ f &\longmapsto \check{\Delta}f^\theta \end{aligned}$$

est un anti-isomorphisme d'algèbres isométrique et involutif,

v) l'opérateur $P^\theta = \Phi \circ P \circ \Phi$ donné par

$$\begin{aligned} P^\theta : L^1(G) &\longrightarrow L^1(G) \\ f &\longmapsto \check{\Delta}P(\check{\Delta}f^\theta) \circ \theta \end{aligned}$$

vérifie les cinq conditions de la définition (1-3),

vi) la restriction de l'application Φ donnée par

$$\begin{aligned}\Phi : L_{P^\theta}^1(G) &\longrightarrow L_P^1(G) \\ f &\longmapsto \check{\Delta} f^\theta\end{aligned}$$

est un anti-isomorphisme d'algèbres isométrique et involutif. Par conséquent, l'opérateur P est de Gel'fand, si et seulement si, P^θ l'est aussi.

Preuve

Les assertions i), ii), iii) et iv) voir [2].

v) L'opérateur $P^\theta = \Phi \circ P \circ \Phi$ vérifie les cinq conditions de la définition (1-3). En effet:

- L'opérateur P^θ est évidemment \mathbb{C} -linéaire continu.

- $P^\theta \circ P^\theta = P^\theta$. En effet, $\Phi \circ \Phi = id_{L^1(G)}$.

- pour tout $f \in L^1(G)$ on a

$$\begin{aligned}P^\theta(f^*) &= \Phi \circ P \circ \Phi(f^*) \\ &= (P^\theta(f))^*\end{aligned}$$

car, $\Phi(f^*) = (\Phi(f))^*$ et $P(f^*) = (P(f))^*$.

- Soient $f, g \in L^1(G)$ on a

$$\begin{aligned}P^\theta(f) * P^\theta(g) &= \Phi \circ P \circ \Phi(f) * \Phi \circ P \circ \Phi(g) \\ &= \Phi(P \circ \Phi(g) * P \circ \Phi(f)) \\ &= \Phi \circ P(P(\Phi(g)) * \Phi(f)) \\ &= \Phi \circ P \circ \Phi(f * \Phi \circ P \circ \Phi(g)) \\ &= P^\theta(f * P^\theta(g)).\end{aligned}$$

De la même façon on démontre que

$$P^\theta(f) * P^\theta(g) = P^\theta(P^\theta(f) * g).$$

- Soit $f \in K(G)$ nous avons

$$(P^\theta)^*(f) = \Phi^* \circ P^* \circ \Phi^*(f).$$

Pour tout élément $f \in L^1(G)$ et $g \in L^\infty(G)$ on a

$$\begin{aligned}\langle \Phi(f), g \rangle &= \int_G \Phi(f)(x)g(x)dm_G(x) \\ &= \int_G \check{\Delta}(x)f \circ \theta(x)g(x)dm_G(x) \\ &= \int_G \check{\Delta}(x)f \circ \theta(x)g(x)dm_G(x) \\ &= \int_G (\Delta \circ \theta(x))(f \circ \theta(x))g(x)dm_G(x)\end{aligned}$$

faisons le changement $x \mapsto (\theta(x))^{-1}$ en posant $z^{-1} = \theta(x)$, nous obtenons d'après i) $dm_G(x) = dm_G(z)$ et par conséquent on a

$$\begin{aligned}\langle \Phi(f), g \rangle &= \int_G (\Delta(z^{-1}))(f(z^{-1}))(g \circ \theta(z^{-1}))dm_G(z) \\ &= \int_G (f(z))(g \circ \theta(z))dm_G(z) \\ &= \langle f, g^\theta \rangle \\ &= \langle f, \Phi^*(g) \rangle,\end{aligned}$$

donc, $\Phi^*(g) = g^\theta$. par suite pour tout $f \in K(G)$ on a

$$\begin{aligned}(P^\theta)^*(f) &= \Phi^* \circ P^* \circ \Phi^*(f) \\ &= (P^*(f^\theta))^\theta \in C^b(G).\end{aligned}$$

vi) la restriction de l'application Φ sur $L^1_{P^\theta}(G)$ prend ses valeurs dans $L^1_P(G)$. Donc elle est évidemment un anti-isomorphisme d'algèbres isométrique et involutif. Par conséquent, l'opérateur P est de Gel'fand, si et seulement si, P^θ l'est aussi. ■

Proposition (1-14)

Soient G un groupe topologique localement compact, $P : L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$ un opérateur vérifiant les cinq conditions de la définition (1-3) et χ un caractère unitaire de G . Alors,

i) l'application

$$\begin{aligned}\Theta : L^1(G) &\longrightarrow L^1(G) \\ f &\longmapsto \bar{\chi}f\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres isométrique et involutif.

ii) l'opérateur $P_\chi = \Theta^{-1} \circ P \circ \Theta$ donné par

$$\begin{aligned}P_\chi : L^1(G) &\longrightarrow L^1(G) \\ f &\longmapsto \chi P(\bar{\chi}f)\end{aligned}$$

vérifie les cinq conditions de la définition (1-3),

iii) la restriction de l'application Θ donnée par

$$\begin{aligned}\Theta : L^1_{P_\chi}(G) &\longrightarrow L^1_P(G) \\ f &\longmapsto \bar{\chi}f\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbre isométrique et involutif. Par conséquent, l'opérateur P est de Gel'fand, si et seulement si, P_χ l'est aussi.

Preuve

i) voir [2]

ii) L'opérateur $P_\chi = \Theta^{-1} \circ P \circ \Theta$ vérifie les cinq conditions de la définition (1-3). En effet,

- L'opérateur P_χ est évidemment \mathbb{C} -linéaire continu.
- $P_\chi \circ P_\chi = P_\chi$ (évident).
- Pour tout $f \in K(G)$ on a évidemment $P_\chi(f^*) = (P_\chi(f))^*$.
- Pour tout $f, g \in L^1(G)$ nous avons

$$\begin{aligned}P_\chi(f) * P_\chi(g) &= \Theta^{-1} \circ P \circ \Theta(f) * \Theta^{-1} \circ P \circ \Theta(g) \\ &= \Theta^{-1} (P \circ \Theta(f) * P \circ \Theta(g)) \\ &= \Theta^{-1} \circ P (P \circ \Theta(f) * P \circ \Theta(g)) \\ &= \Theta^{-1} \circ P \circ \Theta (\Theta^{-1} \circ P \circ \Theta(f) * g) \\ &= P_\chi (P_\chi(f) * g).\end{aligned}$$

De la même façon on démontre que $P_\chi(f) * P_\chi(g) = P_\chi(f * P_\chi(g))$.

- Pour tout $f \in K(G)$ on a $P_\chi(f) = \chi P(\bar{\chi}f) \in C^b(G)$.

iii) Il est facile de vérifier que la restriction de l'opérateur Θ est bien défini de $L^1_{P_\chi}(G)$ dans $L^1_P(G)$ par suite, on déduit que c'est un isomorphisme d'algèbres isométrique et involutif. Par conséquent, l'opérateur P est de Gel'fand, si et seulement si, P_χ l'est aussi. ■

Les trois dernières propositions peuvent être généralisées comme suit

Proposition (1-15)

Soient P un opérateur de $L^1(G)$ dans $L^1(G)$ vérifiant les cinq conditions de la définition et $\varphi : L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$ un isomorphisme d'algèbres isométrique involutif tel que pour tout $f \in K(G)$ on a $\varphi^{-1} \circ P \circ \varphi(f) \in C^b(G)$. Alors,

i) L'opérateur $P_\varphi = \varphi^{-1} \circ P \circ \varphi$ vérifie les cinq conditions de la définition (1-3).

ii) La restriction de l'opérateur φ donné par, $\varphi : L^1_{P_\varphi}(G) \longrightarrow L^1_P(G)$ est un isomorphisme d'algèbres isométrique et involutif. Par conséquent, l'opérateur P est de Gel'fand, si et seulement si, P_φ l'est aussi.

III. FORMES CONTINUES POSITIVES SUR $L^1_P(G)$ ET NOTION DE FONCTIONS DE TYPE P -POSITIF

Lemme (2-1)

Soit $\lambda : L^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire positive. Alors on a les assertions suivantes:

i) L'application

$$\begin{aligned} B: L^1(G) \times L^1(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\longmapsto \lambda(g^* * f) \end{aligned}$$

est une 2-forme sesquilinéaire hermitienne et positive.

ii) Soit $f \in L^1(G)$ on a $\lambda(f^* * f) = 0$ si, et seulement si, pour tout $g \in L^1(G)$ on a $\lambda(g * f) = 0$. Et l'ensemble $N = \{f \in L^1(G) \mid \lambda(f^* * f) = 0\}$ est un idéal à gauche de $L^1(G)$.

iii) L'application

$$\begin{aligned} \tilde{B}: (L^1(G) \setminus N) \times (L^1(G) \setminus N) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\dot{f}, \dot{g}) &\longmapsto B(f, g) \end{aligned}$$

est une 2-forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

iv) Si λ est une forme linéaire continue positive alors, il existe une unique forme linéaire $\tilde{\lambda} : (L^1(G) \setminus N) \rightarrow \mathbb{C}$ continue relativement à la topologie de la norme induite du produit scalaire \tilde{B} et $\tilde{\lambda} \circ q = \lambda$ où q est la surjection canonique définie de $L^1(G)$ dans $(L^1(G) \setminus N)$.

Théorème (2-2)

Soient G un groupe topologique localement compact, $P : L^1(G) \rightarrow L^1(G)$ un opérateur continu et $\lambda : L^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire continue positive telle que $\lambda(f) = \lambda(P(f)) \forall f \in L^1(G)$. Alors, il existe une unique fonction $\varphi \in C^b_{P^*}(G)$ de type positif telle que pour tout $f \in L^1(G)$ on a $\lambda(f) = \int_G f(x)\varphi(x)dm_G(x)$ et $\|\lambda\| = \varphi(e)$.

Preuve

La forme $\lambda \in (L^1(G))'$ et comme $(L^1(G))' \simeq L^\infty(G)$ [8] alors, il existe une fonction unique $\varphi \in L^\infty(G)$ telle que pour tout $f \in L^1(G)$ on a $\lambda(f) = \int_G f(x)\varphi(x)dm_G(x)$ ie $\lambda = \langle \cdot, \varphi \rangle$. Par suite, pour tout $f \in L^1(G)$ on a

$$\begin{aligned} \lambda(f) &= \langle f, \varphi \rangle \\ &= \langle P(f), \varphi \rangle \\ &= \langle f, P^*(\varphi) \rangle, \end{aligned}$$

d'où, $P^*(\varphi) = \varphi$ ou encore, $\varphi \in L^\infty_{P^*}(G)$.

Nous avons pour tout $f \in L^1(G)$ $\langle f^* * f, \varphi \rangle \geq 0$ car λ est positive, d'où φ est de type positif [13]. Pour montrer que φ est continue il suffit d'adapter la démonstration de Faraut à notre cas (voir [12]) en montrant que la fonction φ est la fonction caractéristique d'une représentation cyclique unitaire de G .

Montrons que $\|\lambda\| = \varphi(e)$. Soit $(g_i)_{i \in I}$ une unité approchée de $L^1(G)$ telle qu'elle est construite dans [9]. Nous avons

$$\lim_i \lambda(g_i) = \varphi(e).$$

En effet, pour tout $i \in I$ on a, $|\lambda(g_i) - \varphi(e)| \leq \int_i g_i(x) |\varphi(x) - \varphi(e)| dm_G(x)$, soit $\varepsilon \geq 0$, comme φ est continue au point e , il existe $i_0 \in I$ tel que pour tout $x \in i_0$ on a, $|\varphi(x) - \varphi(e)| \leq \varepsilon$. Donc pour tout $i \geq i_0$ on a $|\lambda(g_i) - \varphi(e)| \leq \varepsilon$. D'où on déduit que $\varphi(e) \leq \|\lambda\|$.

Puisque la fonction φ est de type positif nous avons $|\varphi(x)| \leq \varphi(e)$. Donc, $|\lambda(f)| \leq \varphi(e) \|f\|_1$, ce qui entraîne que $\|\lambda\| \leq \varphi(e)$. D'où $\|\lambda\| = \varphi(e)$. ■

Corollaire (2-3)

L'ensemble $P^1_P(G)$ est compact pour la topologie *-faible $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$; où $P^1_P(G)$ désigne l'ensemble des fonctions sur G à valeurs complexes de type positif vérifiant $P^*\varphi = \varphi$ et $\varphi(e) \leq 1$.

Preuve

Par le théorème (2-2) on montre que $P_P^1(G)$ est fermé dans la boule unité de $L^\infty(G) \simeq (L^1(G))'$ qui est compacte pour la topologie *-faible $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$. ■

Théorème (2-4)

Soient G un groupe topologique localement compact, $P : L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$ un opérateur vérifiant les cinq conditions de la définition (1-2) et $\lambda : L_P^1(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire continue positive. Alors il existe une unique fonction $\varphi \in L_{P^*}^\infty(G)$ telles que pour tout $f \in L^1(G)$ on a

$$\lambda(P(f)) = \int_G P(f)(x)\varphi(x)dm_G(x)$$

et $\langle P(f) * f^*, \varphi \rangle \geq 0$.

Preuve

Nous avons $\lambda \in (L_P^1(G))'$ donc d'après la dualité non dégénérée qui existe entre $L_P^1(G)$ et $L_{P^*}^\infty(G)$ [8], il existe une unique fonction $\varphi \in L_{P^*}^\infty(G)$ telle que $\lambda = \langle \cdot, \varphi \rangle$. Comme λ est positive ([9], [11]) nous avons pour tout $f \in L^1(G)$,

$$\begin{aligned} \lambda(P(f) * P(f)^*) \geq 0 &\iff \langle P(f) * f^*, P^*(\varphi) \rangle \geq 0 \\ &\iff \langle P(f) * f^*, \varphi \rangle \geq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Soient P un opérateur vérifiant les cinq conditions de la définition (1-2) et ω une forme linéaire continue sur $L_P^1(G)$. Elle est définie par une fonction $\varphi \in L_{P^*}^\infty(G)$ vérifiant $\omega(P(f)) = \langle f, \varphi \rangle_{L^1(G) \times L^\infty(G)}$ pour tout $f \in L^1(G)$.

Proposition (2-5).

La forme ω est positive, si et seulement si, pour tout $f \in L^1(G)$ on a $\langle P(f) * f^*, \varphi \rangle \geq 0$.

Preuve

Pour tout $f \in L^1(G)$ nous avons $\omega((P(f)) * (P(f))^*) = \langle P(f) * f^*, \varphi \rangle$, d'où le résultat. ■

Remarque (2-6)

Si $P = id_{L^1(G)}$ alors on trouve que la forme ω sur $L^1(G)$ sera positive, si et seulement si, pour tout $f \in L^1(G)$ on a $\langle f * f^*, \varphi \rangle \geq 0$. Ce qui est équivalent à dire que φ est une fonction de type positif [13]. Ce qui nous amène à poser une nouvelle définition qui va prolonger celle des fonctions de type positif.

Définition (2-7)

Soient P un opérateur vérifiant les cinq conditions de la définition (1-2) et φ une fonction sur G à valeurs complexes, continue, bornée et $P^*(\varphi) = \varphi$ ie $\varphi \in C_{P^*}^b(G)$. La fonction φ sera dite de type P -positif, si et seulement si, pour tout $f \in L^1(G)$ on a $\langle P(f) * f^*, \varphi \rangle \geq 0$. Notons par $P(G, P)$ l'ensemble des fonctions de type P -positif.

Proposition (2-8)

Soit $\varphi \in C_{P^*}^b(G)$. La fonction φ est de type P -positif, si et seulement si, pour tout $f \in L^1(G)$ on a $\int_G \int_G f(x)\overline{f(y)}P^*(L_y\varphi)(x)dm_G(x)dm_G(y) \geq 0$.

Preuve

Pour tout $f \in L^1(G)$ nous avons:

$$\langle P(f) * f^*, \varphi \rangle = \int_G \Delta(y)\overline{f(y)} \left(\int_G P(f)(xy)\varphi(x)dm_G(x) \right) dm_G(y)$$

faisons le changement en posant $z = xy$ ce qui entraîne que $dm_G(z) = \Delta(y)dm_G(x)$ et $x = y^{-1}z$. Donc, on a:

$$\begin{aligned} \langle P(f) * f^*, \varphi \rangle &= \int_G \Delta(y) \overline{f(y)} \left(\int_G P(f)(z) \varphi(y^{-1}z) \Delta(y^{-1}) dm_G(z) \right) dm_G(y) \\ &= \int_G \overline{f(y)} \langle P(f), L_y \varphi \rangle dm_G(y) \\ &= \int_G \overline{f(y)} \langle f, P^*(L_y \varphi) \rangle dm_G(y) \\ &= \int_G \int_G \overline{f(y)} f(x) P^*(L_y \varphi)(x) dm_G(x) dm_G(y). \end{aligned}$$

D'où, la preuve de la proposition. ■

Théorème (2-9)

Soit φ une fonction sur G à valeurs complexes, continue, bornée et $P^*(\varphi) = \varphi$ ou autrement dit $\varphi \in C_{P^*}^b(G)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- i) φ est de type P -positif.
- ii) pour toute mesure $\mu \in M^1(G)$ on a le terme suivant:
 $\langle \tilde{P}(\mu) * \mu, \varphi \rangle = \langle \mu \otimes \mu^*, F \rangle$ est positif, où $F(x, y) = P^*(L_{x^{-1}}\varphi)(y) \forall x, y \in G$.
- iii) l'inégalité

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_j P^*(L_{x_i^{-1}}\varphi)(x_j^{-1}) \geq 0$$

est vérifiée quels que soient $x_1, \dots, x_n \in G$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Autrement dit, la matrice $\left(P^*(L_{x_i^{-1}}\varphi)(x_j^{-1}) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est hermitienne positive, $\forall n \geq 1, \forall x_1, \dots, x_n \in G$.

Preuve

i) \implies ii) Pour tout $f \in L^1(G)$, soit $\mu = fm_G \in M^1(G)$ on a

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\mu) * \mu &= P(f)m_G * f^*m_G \\ &= (P(f) * f^*)m_G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{P}(\mu) * \mu, \varphi \rangle &= \langle (P(f) * f^*)m_G, \varphi \rangle \\ &= \langle P(f) * f^*, \varphi \rangle \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

comme l'espace $\{fm_G, f \in L^1(G)\}$ est dense dans $M^1(G)$ et les applications \tilde{P} , le produit de convolution et l'application $\langle \cdot, \varphi \rangle$ sont continues relativement à la topologie vague on déduit immédiatement le résultat. De même ii) \implies i) il suffit de prendre $\mu = fm_G$ où $f \in L^1(G)$.

ii) \implies iii) Soient $x_1, \dots, x_n \in G$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ on considère $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$. Alors,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{P}(\mu) * \mu, \varphi \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_j P^*(L_{x_i^{-1}}\varphi)(x_j^{-1}) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

iii) \implies ii) On utilise la densité de l'espace $Vect((\delta_x)_{x \in G})$ dans $M^1(G)$ relativement à la topologie vague et la continuité relativement à la même topologie des applications \tilde{P} , le produit de convolution et l'application $\langle \cdot, \varphi \rangle$ on montre le résultat. ■

Le théorème suivant donne des propriétés fondamentales des fonctions de type P -positif.

Théorème (2-10)

Soient G un groupe topologique localement compact, $P : L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$ un opérateur vérifiant les conditions de la définition (1-2). Alors:

- i) Pour tout $\varphi, \psi \in P(G, P)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ on a $\alpha\varphi + \beta\psi \in P(G, P)$.
- ii) Si $\varphi \in P(G, P)$ alors, pour tout $s \in G$ on a $P^*(L_{s^{-1}}\varphi)(s^{-1}) \geq 0$.

En particulier, pour $s = e$ on a $\varphi(e) = P^*(L_e\varphi)(e) \geq 0$.

iii) Soit $\varphi \in P(G, P)$. Pour tout $s, t \in G$ on a $P^*(L_{s^{-1}}\varphi)(t^{-1}) = \overline{P^*(L_{t^{-1}}\varphi)(s^{-1})}$.

iv) Soit $\varphi \in P(G, P)$. Pour tout $s, t \in G$ on a, $|P^*(L_{s^{-1}}\varphi)(t^{-1})|^2 \leq P^*(L_{s^{-1}}\varphi)(s^{-1})P^*(L_{t^{-1}}\varphi)(t^{-1})$.

En particulier pour tout $s \in G$ on a $|\varphi(s)|^2 \leq \varphi(e)P^*(L_{s^{-1}}\varphi)(s^{-1})$.

v) Soit $\varphi \in P(G, P)$. Pour tout $x \in G$ on a $\varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)}$.

vi) Soit $\varphi \in P(G, P)$. On a, $\varphi \equiv 0$ si et seulement si, $\varphi(e) = 0$.

Preuve

i) Soient $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, $x_1, \dots, x_n \in G$ on a

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j P^*(L_{x_i^{-1}}(\alpha\varphi + \beta\psi))(x_j^{-1}) = \alpha \left(\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j P^*(L_{x_i^{-1}}\varphi)(x_j^{-1}) \right) + \beta \left(\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j P^*(L_{x_i^{-1}}\psi)(x_j^{-1}) \right)$$

comme les éléments $\varphi, \psi \in P(G, P)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ on a évidemment $\alpha\varphi + \beta\psi \in P(G, P)$.

ii) Si $\varphi \in P(G, P)$, pour $n = 1$, $x_1 = s$ et $\alpha_1 = 1$ on déduit facilement que $P^*(L_{s^{-1}}\varphi)(s^{-1}) \geq 0$; et pour $s = e$ on a $P^*(L_e\varphi)(e) = \varphi(e) \geq 0$.

iii) Prenons $n = 2$, $x_1 = s$ et $x_2 = t$ on a la matrice $A = \left(P^*(L_{x_i^{-1}}\varphi)(x_j^{-1}) \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$ est hermitienne donc $A^* = A$ ie ${}^t \bar{A} = A$ donc on déduit facilement que

$$P^*(L_{s^{-1}}\varphi)(t^{-1}) = \overline{P^*(L_{t^{-1}}\varphi)(s^{-1})}.$$

iv) Pour $n = 2$, $x_1 = s$ et $x_2 = t$, on a le déterminant de la matrice $A = \left(P^*(L_{x_i^{-1}}\varphi)(x_j^{-1}) \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$ est positif. Donc, par un calcul direct on a l'inégalité

$$|P^*(L_{s^{-1}}\varphi)(t^{-1})|^2 \leq P^*(L_{s^{-1}}\varphi)(s^{-1})P^*(L_{t^{-1}}\varphi)(t^{-1}).$$

En particulier, pour $s = e$ on a $|\varphi(t^{-1})|^2 \leq \varphi(e)P^*(L_{t^{-1}}\varphi)(t^{-1})$. En utilisant l'assertion v) qu'on démontre par la suite on obtient le résultat.

v) Soit $\varphi \in P(G, P)$ et $x \in G$ nous avons

$$\begin{aligned} \varphi(x^{-1}) &= \langle \delta_{x^{-1}}, \varphi \rangle \\ &= \langle \tilde{P}(\delta_{x^{-1}}), \varphi \rangle \\ &= \langle \tilde{P}(\delta_{x^{-1}}) * \delta_e^*, \varphi \rangle \\ &= \langle \delta_{x^{-1}} * \tilde{P}(\delta_e^*), \varphi \rangle \\ &= \int_G \int_G \varphi(st) d\delta_{x^{-1}}(s) d\tilde{P}(\delta_e^*)(t) \\ &= \int_G \varphi(x^{-1}t) d\tilde{P}(\delta_e^*)(t) \\ &= \langle \tilde{P}(\delta_e^*), L_x\varphi \rangle \\ &= \langle \delta_e^*, P^*(L_x\varphi) \rangle \\ &= \langle \delta_e, P^*(L_x\varphi) \rangle \\ &= P^*(L_x\varphi)(e) \\ &= \overline{P^*(L_e\varphi)(x)} \\ &= \overline{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

vi) Si $\varphi(e) = 0$ on a d'après l'inégalité iv) on a $\varphi(t) = 0 \forall t \in G$. ■

Inégalités pour les éléments de $P(G, P)$:

L'objet de ce qui suit est de donner une généralisation de certaines inégalités vérifiées par les fonctions de type positif ie les éléments de $P(G)$, et qui sont démontrées dans [1].

i) Pour tout $x, y \in G$ on a

$$|\varphi(e)\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)|^2 \leq \left(\varphi(e) - |\varphi(x)|^2 \right) \left(\varphi(e)^2 - |\varphi(y)|^2 \right)$$

ii) Pour toute suite $\{x_1, \dots, x_n\}$ dans G et $\{a_1, \dots, a_n\}$ dans \mathbb{C} où $n \geq 1$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i) \right|^2 \leq \varphi(e) \left(\sum_{i,j=1}^n a_i \bar{a}_j \varphi(x_i^{-1} x_j) \right)$$

Théorème (2-11)

Soit $\varphi \in P(G, P)$ ie φ est une fonction de type P -positif non nulle. Alors:

i) $\forall x, y \in G$ on a

$$\left| \frac{P^*(L_x \varphi)(y)}{\varphi(e)} - \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{\varphi(e)^2} \right|^2 \leq \left(\frac{P^*(L_{x^{-1}} \varphi)(x^{-1})}{\varphi(e)} - \left| \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)} \right|^2 \right) \left(\frac{P^*(L_y \varphi)(y)}{\varphi(e)} - \left| \frac{\varphi(y)}{\varphi(e)} \right|^2 \right)$$

ii)

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i) \right|^2 \leq \varphi(e) \left(\sum_{i,j=1}^n \bar{a}_i a_j P^*(L_{x_i} \varphi)(x_j) \right)$$

Pour toute suite $\{x_1, \dots, x_n\}$ dans G et $\{a_1, \dots, a_n\}$ dans \mathbb{C} où $n \geq 1$.

Preuve

i) Comme φ est de type P -positif on a la matrice $(P^*(L_{x_i} \varphi)(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est positive, $\forall n \geq 1, \forall x_1, \dots, x_n \in G$. Par suite, son déterminant est positif.

Pour $n = 3, x_1 = e, x_2 = x^{-1}$ et $x_3 = y$ nous avons le déterminant de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(e) & \varphi(x^{-1}) & \varphi(y) \\ \varphi(x) & P^*(L_{x^{-1}} \varphi)(x^{-1}) & P^*(L_{x^{-1}} \varphi)(y) \\ \varphi(y^{-1}) & P^*(L_y \varphi)(x^{-1}) & P^*(L_y \varphi)(y) \end{pmatrix}$$

est positif. Posons

$$\alpha_1 = \varphi(e), a = \varphi(x^{-1}), b = \varphi(y), c = P^*(L_{x^{-1}} \varphi)(y), \alpha_2 = P^*(L_{x^{-1}} \varphi)(x^{-1}) \text{ et } \alpha_3 = P^*(L_y \varphi)(y).$$

Donc, on a

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & b \\ \bar{a} & \alpha_2 & c \\ \bar{b} & \bar{c} & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \det A \geq 0 &\iff \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3 - |c|^2) - a (\alpha_3 \bar{a} - \bar{b} c) + b (\bar{a} c - \alpha_2 \bar{b}) \geq 0 \\ &\iff \alpha_1 |c|^2 - a \bar{b} c - \bar{a} b \bar{c} \leq \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_3 |a|^2 - \alpha_2 |b|^2 \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\alpha_1 = \varphi(e) \geq 0$ et en ajoutant le terme $|a|^2 |b|^2$ on trouve, $|\alpha_1 c - \bar{a} b|^2 \leq (\alpha_1 \alpha_2 - |a|^2) (\alpha_1 \alpha_3 - |b|^2)$ ce qui est équivalent à

$$|\varphi(e) P^*(L_{x^{-1}} \varphi)(y) - \varphi(x) \varphi(y)|^2 \leq (\varphi(e) P^*(L_{x^{-1}} \varphi)(x^{-1}) - |\varphi(x)|^2) (\varphi(e) P^*(L_y \varphi)(y) - |\varphi(y)|^2)$$

d'où on déduit le résultat.

ii) Pour montrer cette inégalité on utilise l'inégalité de Cauchy-schwarz [18] dans l'espace préhilbertien E_φ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$.

Pour tout $f, g \in E_\varphi$ nous avons $|\langle f, g \rangle_\varphi|^2 \leq \langle f, f \rangle_\varphi \langle g, g \rangle_\varphi$. Pour $f = \sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi)$ et

$g = \sum_{j=1}^m b_j P^*(L_{y_j} \varphi)$ on a l'inégalité,

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \bar{b}_j P^*(L_{x_i} \varphi)(y_j) \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \bar{a}_j P^*(L_{x_i} \varphi)(x_j) \right) \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_i \bar{b}_j P^*(L_{y_i} \varphi)(y_j) \right)$$

en particulier pour $m = 1$, $y_1 = e$ et $b_1 = 1$ on obtient l'inégalité suivante:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i^{-1}) \right|^2 \leq \varphi(e) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \bar{a}_j P^*(L_{x_i} \varphi)(x_j) \right)$$

quitte à prendre $f = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i P^*(L_{x_i} \varphi)$ nous obtenons l'inégalité

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i) \right|^2 \leq \varphi(e) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{a}_i a_j P^*(L_{x_i} \varphi)(x_j) \right). \blacksquare$$

Fonctions P-sphériques

Soient G un groupe topologique localement compact et P un opérateur défini de $L^1(G)$ dans $L^1(G)$ vérifiant les cinq conditions de la définition (1-2).

Définition (3-1)

Une fonction $\varphi \in C_{P^*}^b(G) \setminus \{0\}$ est dite P -sphérique, si pour tout $x, y \in G$ on a $P^*(L_{x^{-1}} \varphi)(y) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Remarque (3-2)

Si φ est P -sphérique, on prend $x = y = e$, on obtient $\varphi(e)^2 = \varphi(e)$ donc, $\varphi(e) = 0$ ou $\varphi(e) = 1$. Si $\varphi(e) = 0$ alors, pour tout $y \in G$ et pour $x = e$ on a $\varphi(e)\varphi(y) = \varphi(y) = 0$ ce qui est impossible car φ est non nulle, d'où $\varphi(e) = 1$.

Proposition (3-3)

Soit $\varphi \in C_{P^*}^b(G)$. On a φ est P -sphérique, si et seulement si, l'application

$$\begin{aligned} \chi_\varphi: L_P^1(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

où $\langle f, \varphi \rangle = \int_G f(x)\varphi(x)dm_G(x)$ pour tout $f \in L_P^1(G)$, est un homomorphisme d'algèbres non nul continu.

Preuve

Pour tout $f, g \in L^1(G)$ on a,

$$\chi_\varphi(P(f) * P(g)) = \int_G f(y) \left(\int_G P(g)(y^{-1}x)P^*(\varphi)(x)dm_G(x) \right) dm_G(y).$$

Faisons le changement en posant $z = y^{-1}x$ alors, on obtient

$$\chi_\varphi(P(f) * P(g)) = \int_G \int_G f(y)g(z)P^*(L_{y^{-1}}P^*(\varphi))(z)dm_G(y)dm_G(z),$$

et

$$\chi_\varphi(P(f))\chi_\varphi(P(g)) = \int_G \int_G f(y)g(z)P^*(\varphi)(y)P^*(\varphi)(z)dm_G(y)dm_G(z),$$

\implies Si φ est P -sphérique alors, l'application χ_φ est bien définie, \mathbb{C} -linéaire, continue, non nulle et pour tout $f, g \in L^1(G)$ on a d'après les égalités précédentes $\chi_\varphi(P(f) * P(g)) = \chi_\varphi(P(f))\chi_\varphi(P(g))$ ou autrement dit, l'application χ_φ est un morphisme d'algèbres continu non nul.

\impliedby Si χ_φ est un morphisme d'algèbres continu non nul alors, pour tout $f, g \in L^1(G)$ nous avons

$$\int_G \int_G f(x)g(y) (P^*(L_{x^{-1}} \varphi)(y) - \varphi(x)\varphi(y)) dm_G(x)dm_G(y) = 0,$$

posons, $F(x, y) = P^*(L_{x^{-1}} \varphi)(y) - \varphi(x)\varphi(y)$, alors, pour tout $f, g \in L^1(G)$ nous avons, $\int_G \int_G f(x)g(y)F(x, y)dm_G(x)dm_G(y) = 0$, ce qui entraîne que $F \equiv 0$ ie pour tout $x, y \in G$ on a, $P^*(L_{x^{-1}} \varphi)(y) = \varphi(x)\varphi(y)$. Donc, φ est P -sphérique. \blacksquare

Proposition (3-4)

Soit $\varphi \in C_{P^*}^b(G)$. On a φ est P -sphérique si et seulement si l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} : M_P^1(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longmapsto \langle v, \varphi \rangle \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres, continu et non nul.

Preuve.

\implies) $\tilde{\chi}$ est évidemment \mathbb{C} -linéaire continue. D'après la proposition (3-3), on a l'application

$$\begin{aligned} \chi_\varphi : L_P^1(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres non nul et continu. On a pour tout $f \in L_P^1(G)$, $\tilde{\chi}(fm_G) = \chi_\varphi(f)$. Donc, $\tilde{\chi}$ est non nulle et pour tout $f, g \in L_P^1(G)$ on a $\tilde{\chi}((fm_G) * (gm_G)) = \tilde{\chi}(fm_G)\tilde{\chi}(gm_G)$, et comme l'ensemble $\{fm_G/f \in L_P^1(G)\}$ est vaguement dense dans $M_P^1(G)$ et $\tilde{\chi}$ est continue pour la topologie vague on déduit que pour tout $\mu, v \in M_P^1(G)$, $\tilde{\chi}(\mu * v) = \tilde{\chi}(\mu)\tilde{\chi}(v)$.

\impliedby) Si $\tilde{\chi}$ est un morphisme d'algèbres non nul continu alors, on a évidemment χ_φ est un morphisme d'algèbres non nul continu de $L_P^1(G)$ dans \mathbb{C} donc, la fonction φ est P -sphérique. ■

Proposition (3-5)

Soit $\varphi \in C_{P^*}^b(G)$. On a φ est P -sphérique si et seulement si pour tout $f \in L^1(G)$ on a $P(f) * \check{\varphi} = \chi_\varphi(P(f))\check{\varphi}$.

Preuve

Pour tout $f \in L^1(G)$, $x \in G$ nous avons

$$\begin{aligned} P(f) * \check{\varphi}(x) &= \int_G P(f)(y)(L_x\varphi)(y)dm_G(y) \\ &= \int_G f(y)P^*(L_x\varphi)(y)dm_G(y). \end{aligned}$$

\implies) Si la fonction φ est P -sphérique alors, on a par définition pour tout $x, y \in G$ $P^*(L_x\varphi)(y) = \varphi(x^{-1})\varphi(y)$, donc, d'après l'égalité précédente, on a pour tout $f \in L^1(G)$, $x \in G$

$$\begin{aligned} P(f) * \check{\varphi}(x) &= \int_G f(y)P^*(L_x\varphi)(y)dm_G(y) \\ &= \int_G f(y)\varphi(x^{-1})\varphi(y)dm_G(y) \\ &= \varphi(x^{-1}) \left(\int_G f(y)\varphi(y)dm_G(y) \right) \\ &= \varphi(x^{-1}) \langle f, \varphi \rangle \\ &= \varphi(x^{-1}) \langle f, P^*(\varphi) \rangle \\ &= \varphi(x^{-1}) \langle P(f), \varphi \rangle \\ &= \chi_\varphi(P(f))\check{\varphi}(x). \end{aligned}$$

\impliedby) Pour tout $f, g \in L^1(G)$ nous avons

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(P(f) * P(g))\check{\varphi} &= (P(f) * P(g)) * \check{\varphi} \\ &= P(f) * (\chi_\varphi(P(g))\check{\varphi}) \\ &= \chi_\varphi(P(g))(P(f) * \check{\varphi}) \\ &= \chi_\varphi(P(g))\chi_\varphi(P(f))\check{\varphi} \end{aligned}$$

et comme φ est non nulle on déduit que, $\chi_\varphi(P(f) * P(g)) = \chi_\varphi(P(f))\chi_\varphi(P(g))$ pour tout $f, g \in L^1(G)$; donc, la fonction φ est sphérique. ■

Proposition (3-6)

Soit $\varphi \in C_{P^*}^b(G)$. On a φ est P -sphérique si et seulement si pour tout $v \in M^1(G)$ on a

$$\tilde{P}(v) * \check{\varphi} = \tilde{\chi}_\varphi(\tilde{P}(v))\check{\varphi}.$$

Preuve

\implies) Si la fonction φ est P -sphérique alors, pour tout $f \in L^1(G)$ on a

$$\begin{aligned} \tilde{P}(fm_G) * \check{\varphi} &= P(f) * \check{\varphi} \\ &= \chi_\varphi(P(f))\check{\varphi} \\ &= \tilde{\chi}_\varphi(P(f)m_G)\check{\varphi}, \end{aligned}$$

comme l'ensemble $\{P(f)m_G/f \in L^1(G)\}$ est vaguement dense dans $M_{\tilde{P}}^1(G)$ et les applications $\tilde{\chi}_\varphi$ et le produit de convolution sont vaguement continues alors, on déduit que pour tout $v \in M_{\tilde{P}}^1(G)$ on a $\tilde{P}(v) * \check{\varphi} = \tilde{\chi}_\varphi(\tilde{P}(v))\check{\varphi}$.

\impliedby) D'après la proposition (3-5), cette implication est évidente. ■

Théorème (3-7)

Soient P un opérateur de Gel'fand et χ un caractère non nul de l'algèbre de Banach commutative $L_P^1(G)$. Alors il existe une unique fonction P -sphérique φ telle que, $\chi = \chi_\varphi$.

Théorème (3-8)

Soit $\varphi \in P(G, P)$ on a, φ est P -sphérique si et seulement si, pour tout $x \in G$ on ait $P^*(L_{x^{-1}}\varphi)(x^{-1}) = |\varphi(x)|^2$.

Preuve

Soit $\varphi \in P(G, P)$. Si φ est P -sphérique. On a pour tout $x \in G$;

$$\begin{aligned} P^*(L_{x^{-1}}\varphi)(x^{-1}) &= \varphi(x)\varphi(x^{-1}) \\ &= \varphi(x)\overline{\varphi(x)} \\ &= |\varphi(x)|^2. \end{aligned}$$

Inversement, supposons que l'égalité du théorème soit vérifiée pour tout $x \in G$. Alors, prenons $x = e$ on obtient

$$\varphi(e) = |\varphi(e)|^2 \geq 0.$$

Si $\varphi(e) = 0$, alors d'après vi) du théorème (2-10) $\varphi \equiv 0$ ce qui est impossible, donc $\varphi(e) \neq 0$ ce qui entraîne que $\varphi(e) = 1$ et d'après l'inégalité i) du théorème (2-11) on obtient pour tout $x, y \in G$

$$P^*(L_x\varphi)(y) = \varphi(x)\varphi(y);$$

ce qui veut dire que φ est P -sphérique.

IV. LIEN ENTRE LES FONCTIONS DE TYPE P -POSITIF ET LES REPRÉSENTATIONS DE G

Théorème (4-1)

Soient G un groupe topologique localement compact, P un opérateur de $L^1(G)$ dans $L^1(G)$ vérifiant les cinq conditions de la définition (1-2), $\varphi \in C_{P^*}^b(G)$ et (ρ, ξ, H) une représentation continue, cyclique et bornée de G telle qu'on a l'égalité $P^*(L_x\varphi)(y) = \langle \rho(x)\xi, \rho(y)\xi \rangle_H \forall x, y \in G$. Alors, la fonction φ est de type P -positif et la représentation ρ est entièrement déterminée à un isomorphisme près par φ .

Preuve

Soient $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{G}$ on a

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j (P^*(L_{x_i} \varphi)(x_j)) = \left\| \sum_{i=1}^n c_i \varrho(x_i) \xi \right\|_H^2 \geq 0.$$

Donc φ est de type P -positif. Soit l'application

$$\begin{aligned} T : H &\longrightarrow C^\infty(G) \\ \eta &\longmapsto T(\eta) \end{aligned}$$

où, $T(\eta)$ est la fonction définie par

$$\begin{aligned} T(\eta) : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \langle \eta, \varrho(x) \xi \rangle_H \end{aligned}$$

T est bien définie. En effet, pour tout $\eta \in H$ la fonction $T(\eta) \in C^b(G)$, car la représentation ϱ est continue bornée. L'application T est évidemment \mathbb{C} -linéaire et continue. En effet, soit $\eta \in H$ on a

$$\|T(\eta)\|_\infty \leq (\sup_{x \in G} \|\varrho(x)\|_{L_\infty(H)} \|\xi\|_H) \|\eta\|_H.$$

L'application T est injective. En effet, soit $\eta \in H$ tel que $T(\eta) = 0$. Alors pour tout $x \in G$ on a $\langle \eta, \varrho(x) \xi \rangle_H = 0$. Par suite, en vertu de la densité de $\text{vect}((\varrho(x) \xi)_{x \in G})$ dans H on déduit que $\eta = 0$. Donc, T est un isomorphisme de H sur $T(H)$.

Comme T est un isomorphisme et $\overline{\text{vect}((\varrho(x) \xi)_{x \in G})}^{\|\cdot\|_H} = H$ on déduit que

$$T(\text{vect}((\varrho(x) \xi)_{x \in G})) = \text{vect}((P^*(L_x \varphi))_{x \in G}), \text{ et } T(H) = \overline{\text{vect}((P^*(L_x \varphi))_{x \in G})}^{\|\cdot\|_\infty}.$$

Donc, l'espace H de la représentation ϱ est déterminé par φ .

Soient $\eta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varrho(x_i) \xi$ et $\eta' = \sum_{j=1}^m \beta_j \varrho(y_j) \xi$ nous avons $\langle \eta, \eta' \rangle_H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \bar{\beta}_j P^*(L_{x_i} \varphi)(y_j)$. Donc,

le produit scalaire défini sur H est déterminé par φ . D'où la représentation ϱ est entièrement déterminée par la fonction φ . ■

Nous allons prouver que la propriété du théorème précédent est caractéristique des fonctions de type P -positif. En effet, nous allons montrer que la réciproque du théorème (4-1) est vraie. Pour cela, soit φ une fonction de type P -positif. Nous allons construire un espace préhilbertien E_φ , un homomorphisme $\varrho_\varphi : G \longrightarrow GL(E_\varphi)$ et un vecteur $\xi_\varphi \in E_\varphi$ ϱ_φ -cyclique tels que l'égalité du théorème (4-1) soit vérifiée.

Proposition (4-3)

Soit $\varphi \in P(G, P)$. Alors, il existe un \mathbb{C} -espace vectoriel $E_\varphi \subseteq C^b(G)$ et une 2-forme sesquilinéaire hermitienne $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ vérifiant les propriétés suivantes

- i) pour tout $f \in E_\varphi$ on a $\langle f, f \rangle_\varphi \geq 0$ ou autrement dit, la 2-forme sesquilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ est positive,
- ii) pour tout $x \in G, f \in E_\varphi$, on a $\langle f, P^*(L_x \varphi) \rangle_\varphi = f(x)$
- iii) pour tout $x \in G$ on a $\langle \varphi, P^*(L_x \varphi) \rangle_\varphi = \varphi(x)$, ($\varphi = P^*(\varphi) = P^*(L_e \varphi) \in E_\varphi$),
- iv) si $\langle f, f \rangle_\varphi = 0$ alors $f \equiv 0$, ou autrement dit, la 2-forme $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ est définie positive.

Preuve

Posons $E_\varphi = \text{vect}((P^*(L_x \varphi))_{x \in G})$. Soient $f, g \in E_\varphi$ avec

$$f = \sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi) \text{ et } g = \sum_{j=1}^m b_j P^*(L_{y_j} \varphi);$$

on pose,

$$\langle f, g \rangle_\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \bar{b}_j P^*(L_{x_i} \varphi)(y_j).$$

Ce produit ne dépend pas de la représentation de f et g . En effet, $\langle f, g \rangle_\varphi = \sum_{j=1}^m \overline{b_j} f(y_j)$ et $\langle f, g \rangle_\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \overline{g(x_i)}$. D'où le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ est bien défini.

i) Soit $f \in E_\varphi$ avec $f = \sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi)$ où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $x_1, \dots, x_n \in G$ on a

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle_\varphi &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \overline{a_j} P^*(L_{x_i} \varphi)(x_j) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car la fonction φ est de type P -positif.

ii) Soient $x \in G$, $f \in E_\varphi$ où $f = \sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi)$ on a

$$\begin{aligned} \langle f, P^*(L_x \varphi) \rangle_\varphi &= \sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi)(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

iii) La fonction $\varphi \in E_\varphi$. En effet, $\varphi = P^*(L_e \varphi)$. Donc d'après l'assertion ii) on a $\langle \varphi, P^*(L_x \varphi) \rangle_\varphi = \varphi(x)$.

iv) Le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ est une forme sesquilinéaire hermitienne positive donc pour tout $f, g \in E_\varphi$ nous avons $|\langle f, g \rangle_\varphi|^2 \leq \langle f, f \rangle_\varphi \langle g, g \rangle_\varphi$ d'où, si $\langle f, f \rangle_\varphi = 0$, alors $\langle f, g \rangle_\varphi = 0 \forall g \in E_\varphi$. Donc en particulier, pour $g = P^*(L_x \varphi)$ on a

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_\varphi &= \langle f, P^*(L_x \varphi) \rangle_\varphi \\ &= f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

par suite, $f \equiv 0$. On conclut que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ est un véritable produit scalaire sur E_φ . ■

Théorème (4-5)

Soit $\varphi \in P(G, P)$. Alors, à la fonction φ correspond l'espace préhilbertien E_φ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ et une application $\varrho_\varphi : G \longrightarrow Gl(E_\varphi)$ définie par $\varrho_\varphi(x) (\sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi)) =$

$\sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{xx_i} \varphi)$ tels que

i) ϱ_φ est un homomorphisme de groupes continu relativement à la topologie faible définie sur $Gl(E_\varphi)$,

ii) ϱ_φ est une représentation cyclique de vecteur cyclique $\xi_\varphi = \varphi$,

iii) soient $h = \sum_{i=1}^n a_i (L_{x_i} \varphi)$ et $g = \sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi)$ alors, pour tout $x, y \in G$ on ait

a) $g(x) = \langle g, \varrho_\varphi(x) \xi_\varphi \rangle_\varphi$ en particulier, $\varphi(x) = \langle \xi_\varphi, \varrho_\varphi(x) \xi_\varphi \rangle_\varphi$,

b) $P^*(L_x h)(y) = \langle \varrho_\varphi(x) g, \varrho_\varphi(y) \xi_\varphi \rangle_\varphi$ en particulier, $P^*(L_x \varphi)(y) = \langle \varrho_\varphi(x) \xi_\varphi, \varrho_\varphi(y) \xi_\varphi \rangle_\varphi$.

Preuve

D'après la proposition précédente l'espace E_φ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ est un espace préhilbertien.

i) Pour tout $x, y \in G$ et $f \in E_\varphi$ on a

$$\begin{aligned}
\varrho_\varphi(xy)(f) &= \sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{(xy)x_i} \varphi) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x(yx_i)} \varphi) \\
&= \varrho_\varphi(x) \left(\sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{(yx_i)} \varphi) \right) \\
&= \varrho_\varphi(x) (\varrho_\varphi(y) \left(\sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi) \right)) \\
&= \varrho_\varphi(x) \circ \varrho_\varphi(y)(f).
\end{aligned}$$

D'où $\varrho_\varphi(xy) = \varrho_\varphi(x) \circ \varrho_\varphi(y)$. Donc ϱ_φ est un homomorphisme de groupes.

ii) L'homomorphisme ϱ_φ est faiblement continu. En effet, pour tout élément $f, g \in E_\varphi$ où $f = \sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi)$ et $g = \sum_{j=1}^m b_j P^*(L_{y_j} \varphi)$; on a,

$$\langle f, \varrho_\varphi(x)g \rangle_\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \bar{b}_j P^*(L_{x_i} \varphi)(xy_j)$$

pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ l'application $x \mapsto P^*(L_{x_i} \varphi)(xy_j)$ est continue (voir les propriétés vérifiées par P). Ceci prouve que l'application $x \mapsto \langle f, \varrho_\varphi(x)g \rangle_\varphi$ est continue. Posons $\xi_\varphi = \varphi$. On a $\varphi = P^*(L_e \varphi)$, donc $\xi_\varphi \in E_\varphi$. On a $E_\varphi = \text{vect}((\varrho_\varphi(x)\xi_\varphi)_{x \in G})$, d'où ϱ_φ est une représentation cyclique.

iii) a) D'après la définition du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ nous avons,

$$\begin{aligned}
\langle g, \varrho_\varphi(x)\xi_\varphi \rangle_\varphi &= \langle g, P^*(L_x \varphi) \rangle_\varphi \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi), P^*(L_x \varphi) \right\rangle_\varphi \\
&= \sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi)(x) \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

en particulier, $\varphi(x) = \langle \xi_\varphi, \varrho_\varphi(x)\xi_\varphi \rangle_\varphi$.

b)

$$\begin{aligned}
P^*(L_x h)(y) &= (\varrho_\varphi(x)g)(y) \\
&= \langle \varrho_\varphi(x)g, \varrho_\varphi(y)\xi_\varphi \rangle_\varphi
\end{aligned}$$

en particulier pour $h = \varphi$ nous avons, $P^*(L_x \varphi)(y) = \langle \varrho_\varphi(x)\xi_\varphi, \varrho_\varphi(y)\xi_\varphi \rangle_\varphi$. ■

Théorème d'unicité (4-6)

Soit $\varphi \in P(G, P)$ et (Π, η, H) une représentation continue cyclique de vecteur cyclique $\eta \in H$ où H est un espace de Hilbert tel que $P^*(L_x \varphi)(y) = \langle \Pi(x)\eta, \Pi(y)\eta \rangle_H$. Alors, il existe un isomorphisme isométrique $F : H_\varphi \rightarrow H$ vérifiant $F(\xi_\varphi) = \eta$ et $F \circ \varrho_\varphi(x) = \Pi(x) \circ F, \forall x \in H$ où H_φ est le complété de E_φ .

Preuve

On a d'après le théorème précédent $(\varrho_\varphi, \xi_\varphi, H_\varphi)$ est une représentation continue cyclique de G vérifiant l'égalité $P^*(L_x \varphi)(y) = \langle \varrho_\varphi(x)\xi_\varphi, \varrho_\varphi(y)\xi_\varphi \rangle_\varphi \forall x, y \in G$. On se propose de montrer que la représentation (Π, η, H) est isométriquement équivalente à $(\varrho_\varphi, \xi_\varphi, H_\varphi)$. Soit l'application

$F : E_\varphi \rightarrow H$ définie par $F(\sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi)) = \sum_{i=1}^n a_i \Pi(x_i)\eta$. F est bien définie en effet, si

$$\sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi) = \sum_{j=1}^m b_j P^*(L_{y_j} \varphi) \text{ alors nous avons pour tout } y \in G,$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i=1}^n a_i \Pi(x_i) \eta, \Pi(y) \eta \right\rangle_H &= \sum_{i=1}^n a_i \langle \Pi(x_i) \eta, \Pi(y) \eta \rangle_H \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \langle \varrho_\varphi(x_i) \xi_\varphi, \varrho_\varphi(y) \xi_\varphi \rangle_\varphi \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \varrho_\varphi(x_i) \xi_\varphi, \varrho_\varphi(y) \xi_\varphi \right\rangle_\varphi \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^m b_j P^*(L_{y_j} \varphi), \varrho_\varphi(y) \xi_\varphi \right\rangle_\varphi \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^m b_j \varrho_\varphi(y_j) \xi_\varphi, \varrho_\varphi(y) \xi_\varphi \right\rangle_\varphi \\
&= \sum_{j=1}^m b_j \langle \varrho_\varphi(y_j) \xi_\varphi, \varrho_\varphi(y) \xi_\varphi \rangle_\varphi \\
&= \sum_{j=1}^m b_j \langle \Pi(y_j) \eta, \Pi(y) \eta \rangle_H \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^m b_j \Pi(y_j) \eta, \Pi(y) \eta \right\rangle_H
\end{aligned}$$

d'où $\sum_{i=1}^n a_i \Pi(x_i) \eta = \sum_{j=1}^m b_j \Pi(y_j) \eta$ ou autrement dit, $F(\sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi)) = F(\sum_{j=1}^m b_j P^*(L_{y_j} \varphi))$. F est évidemment \mathbb{C} -linéaire.

Soient $f = \sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{x_i} \varphi)$ et $g = \sum_{j=1}^m b_j P^*(L_{y_j} \varphi)$

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle_\varphi &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \bar{b}_j P^*(L_{x_i} \varphi)(y_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \bar{b}_j \langle \Pi(x_i) \eta, \Pi(y_j) \eta \rangle_H \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \Pi(x_i) \eta, \sum_{j=1}^m b_j \Pi(y_j) \eta \right\rangle_H \\
&= \langle F(f), F(g) \rangle_H
\end{aligned}$$

donc on déduit que F est un isomorphisme isométrique de H_φ sur H .

En plus pour tout $x \in G$ nous avons $F(\xi_\varphi) = \eta$ et

$$\begin{aligned}
F \circ \varrho_\varphi(x)(f) &= F\left(\sum_{i=1}^n a_i P^*(L_{xx_i} \varphi)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \Pi(xx_i) \eta \\
&= \Pi(x) \left(\sum_{i=1}^n a_i \Pi(x_i) \eta\right) \\
&= \Pi(x) \circ F(f)
\end{aligned}$$

d'où, les deux représentations $(\varrho_\varphi, \xi_\varphi, H_\varphi)$ et (Π, η, H) sont isométriquement équivalentes.

V. NOTION DE P -REPRÉSENTATIONS ET LEURS LIENS AVEC LES REPRÉSENTATIONS NON DÉGÉNÉRÉES DE $L^1_P(G)$

Lemme (5-1)

Soient P un opérateur défini de $L^\infty(G)$ dans $L^\infty(G)$ continu et H un espace de Hilbert. L'opérateur P induit de manière naturelle un opérateur continu qu'on note aussi par P de $L^\infty(G, L_\infty(H))$ dans lui même vérifiant, $\langle P(\Psi)(x)\xi, \eta \rangle_H = P(\Psi_{\xi, \eta})(x)$ où $\Psi \in L^\infty(G, L_\infty(H))$ et $\Psi_{\xi, \eta}(x) = \langle \Psi(x)\xi, \eta \rangle_H$ avec $\xi, \eta \in H$.

Preuve

Soient $\Psi \in L^\infty(G, L_\infty(H))$ et $x \in G$ considérons l'application

$$B_x: H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\xi, \eta) \longmapsto P(\Psi_{\xi, \eta})(x)$$

B_x est une application sesquilinéaire continue. Donc, il existe un unique opérateur continue de H dans H qu'on note par $P(\Psi)(x)$ qui vérifie $B_x(\xi, \eta) = \langle P(\Psi)(x)\xi, \eta \rangle_H$.

On définit l'opérateur P comme suit,

$$P: L^\infty(G, L_\infty(H)) \longrightarrow L^\infty(G, L_\infty(H))$$

$$\Psi \longmapsto P(\Psi)$$

où $\langle P(\Psi)(x)\xi, \eta \rangle_H = P(\Psi_{\xi, \eta})(x)$. L'opérateur P est \mathbb{C} -linéaire tel que $\|P(\Psi)\|_\infty \leq \|P\| \|\Psi\|_\infty$ par suite il est continu. ■

Remarque (5-2)

Si l'opérateur $P: L^\infty(G) \longrightarrow L^\infty(G)$ est un projecteur alors, l'opérateur induit de $L^\infty(G, L_\infty(H))$ dans lui même est aussi un projecteur.

Définition (5-3)

Soient P un opérateur défini de $L^1(G)$ dans $L^1(G)$ vérifiant les cinq conditions de la définition (1-2), $\Pi: G \longrightarrow L_\infty(H)$ une application faiblement continue bornée, où H est un espace de Hilbert. On dit que (Π, H) est une P -représentation du groupe G dans l'espace de Hilbert H si les conditions suivantes sont satisfaites,

- i) $P^*(L_{x^{-1}}P^*\Pi)(y) = \Pi(x) \circ \Pi(y); \forall x, y \in G,$
- ii) $\Pi(x^{-1}) = (\Pi(x))^*; \forall x \in G,$
- iii) $\Pi(e) = id_H.$

Remarque (5-4)

En utilisant la propriété i) et iii) de la définition (5-3) on vérifie facilement que $P^*\Pi = \Pi$.

Théorème (5-5)

Soit (Π, H) une P -représentation de G dans un espace de Hilbert H . Pour toute mesure $\mu \in M^1_P(G)$ on pose $\Pi(\mu) = \int_G \Pi(x)d\mu(x) \in L_\infty(H)$. L'application $\mu \longmapsto \Pi(\mu)$ est une représentation de l'algèbre involutive $M^1_P(G)$ dans H , dont la restriction à $L^1_P(G)$ est non dégénérée.

Réciproquement, toute représentation Π non dégénérée de $L^1_P(G)$ est associée à une P -représentation et une seule de G .

Preuve

Comme Π est faiblement continue bornée, on a pour tout $\mu \in M^1(G)$ l'application

$$H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\xi, \eta) \longmapsto B(\xi, \eta)$$

où, $B(\xi, \eta) = \int_G \langle \Pi(x)\xi, \eta \rangle_H d\mu(x)$ est sesquilinéaire continue, ce qui permet de définir un opérateur continu $\Pi(\mu) \in L_\infty(H)$ qui vérifie $\langle \Pi(\mu)\xi, \eta \rangle_H = \int_G \langle \Pi(x)\xi, \eta \rangle d\mu(x)$. Donc on peut définir une application \mathbb{C} -linéaire continue

$$\Pi: M^1(G) \longrightarrow L_\infty(H)$$

$$\mu \longmapsto \Pi(\mu),$$

soit la restriction de Π à la sous-algèbre $M_P^1(G)$, montrons que Π est une représentation de $M_P^1(G)$ dans H . Soient $\mu, \nu \in M_P^1(G)$ et $\xi, \eta \in H$;

$$\begin{aligned}
\langle \Pi(\mu * \nu)\xi, \eta \rangle_H &= \langle \Pi(\mu * \tilde{P}(\nu)\xi, \eta) \rangle_H \\
&= \int_G \langle \Pi(z)\xi, \eta \rangle_H d(\mu * \tilde{P}(\nu))(z) \\
&= \int_G \int_G \langle \Pi(xy)\xi, \eta \rangle_H d\mu(x) d\tilde{P}(\nu)(y) \\
&= \int_G \left(\int_G \langle \Pi(xy)\xi, \eta \rangle_H d\tilde{P}(\nu)(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_G \left(\int_G \langle (L_{x^{-1}}\Pi)(y)\xi, \eta \rangle_H d\tilde{P}(\nu)(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_G \langle (L_{x^{-1}}\Pi)_{\xi, \eta}, \tilde{P}(\nu) \rangle d\mu(x) \\
&= \int_G \langle P^*(L_{x^{-1}}\Pi)_{\xi, \eta}, \nu \rangle d\mu(x) \\
&= \int_G \int_G \langle P^*(L_{x^{-1}}\Pi)(y)\xi, \eta \rangle_H d\nu(y) d\mu(x) \\
&= \int_G \int_G \langle \Pi(x)\Pi(y)\xi, \eta \rangle_H d\nu(y) d\mu(x) \\
&= \int_G \left(\int_G \langle \Pi(y)\xi, \Pi(x^{-1})\eta \rangle_H d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_G \langle \Pi(x)(\Pi(\nu)\xi), \eta \rangle_H d\mu(x) \\
&= \langle \Pi(\mu)(\Pi(\nu)\xi), \eta \rangle_H.
\end{aligned}$$

Donc, $\Pi(\mu * \nu) = \Pi(\mu)\Pi(\nu)$.

Soient $\mu \in M_P^1(G)$ et $\xi, \eta \in H$ montrons que $\langle \Pi(\mu)\xi, \eta \rangle_H = \langle \xi, \Pi(\mu^*)\eta \rangle_H$. Nous avons,

$$\begin{aligned}
\langle \xi, \Pi(\mu^*)\eta \rangle_H &= \overline{\langle \Pi(\mu^*)\eta, \xi \rangle_H} \\
&= \overline{\int_G \langle \Pi(x)\eta, \xi \rangle_H d\mu^*(x)} \\
&= \overline{\langle \Pi_{\eta, \xi}, \mu^* \rangle} \\
&= \langle \tilde{\Pi}_{\eta, \xi}, \mu \rangle \\
&= \int_G \overline{\Pi_{\eta, \xi}(x^{-1})} d\mu(x) \\
&= \int_G \overline{\langle \Pi(x^{-1})\eta, \xi \rangle_H} d\mu(x) \\
&= \int_G \langle \xi, \Pi(x^{-1})\eta \rangle_H d\mu(x) \\
&= \int_G \langle \xi, \Pi(x)^*\eta \rangle_H d\mu(x) \\
&= \int_G \langle \Pi(x)\xi, \eta \rangle_H d\mu(x) \\
&= \langle \Pi(\mu)\xi, \eta \rangle_H.
\end{aligned}$$

D'où on déduit que $\Pi(\mu^*) = (\Pi(\mu))^*$. Donc, Π est une représentation de l'algèbre involutive $M_P^1(G)$. Par suite, sa restriction à $L_P^1(G)$ est aussi une représentation dans l'espace de Hilbert H . Montrons que Π est non dégénérée sur l'algèbre $L_P^1(G)$. Remarquons d'abord que $\Pi(x) = \Pi(\tilde{P}(\delta_x))$ pour tout élément $x \in G$. En effet, soient $\xi, \eta \in H$

$$\begin{aligned}
 \langle \Pi(\tilde{P}(\delta_x))\xi, \eta \rangle_H &= \int_G \langle \Pi(s)\xi, \eta \rangle_H d\tilde{P}(\delta_x)(s) \\
 &= \langle \Pi_{\xi, \eta}, \tilde{P}(\delta_x) \rangle \\
 &= \langle P^*(\Pi_{\xi, \eta}), \delta_x \rangle \\
 &= P^*(\Pi_{\xi, \eta})(x) \\
 &= \langle P^*(\Pi)(x)\xi, \eta \rangle_H \\
 &= \langle \Pi(x)\xi, \eta \rangle_H \text{ car } P^*(\Pi) = \Pi.
 \end{aligned}$$

Soit $\xi \in H$ tel que pour tout élément $f \in L^1_P(G)$ $\Pi(f)\xi = 0$, montrons que $\xi = 0$.

$$\begin{aligned}
 \Pi(f)\xi = 0 \forall f \in L^1_P(G) &\iff \Pi(P(f))\xi = 0 \forall f \in L^1(G) \\
 &\iff \langle \Pi(P(f))\xi, \eta \rangle_H = 0 \forall f \in L^1(G) \text{ et } \forall \eta \in H \\
 &\iff \int_G P(f)(s) \langle \Pi(s)\xi, \eta \rangle dm_G(s) = 0 \forall f \in L^1(G) \text{ et } \forall \eta \in H \\
 &\iff \int_G P(f)(s) \Pi_{\xi, \eta}(s) dm_G(s) = 0 \forall f \in L^1(G) \text{ et } \forall \eta \in H \\
 &\iff \langle P(f), \Pi_{\xi, \eta} \rangle_{L^1(G) \times L^\infty(G)} = 0 \forall f \in L^1(G) \text{ et } \forall \eta \in H \\
 &\iff \langle f, P^*(\Pi_{\xi, \eta}) \rangle_{L^1(G) \times L^\infty(G)} = 0 \forall f \in L^1(G) \text{ et } \forall \eta \in H \\
 &\iff P^*(\Pi_{\xi, \eta}) = 0 \forall \eta \in H \\
 &\iff P^*(\Pi_{\xi, \eta})(x) = 0 \forall x \in G; \forall \eta \in H \\
 &\iff \langle P^*(\Pi)(x)\xi, \eta \rangle_H = 0 \forall x \in G; \forall \eta \in H \\
 &\iff \langle \Pi(x)\xi, \eta \rangle_H = 0 \forall x \in G; \forall \eta \in H \text{ car } P^*(\Pi) = \Pi \\
 &\iff \Pi(x)\xi = 0 \forall x \in G;
 \end{aligned}$$

donc, en particulier pour $x = e$ on a $\Pi(e)\xi = 0$ or, comme $\Pi(e) = id_H$ on déduit que $\xi = 0$.

La réciproque. Soit $s \in G$ et soit I l'ensemble des voisinages de s ordonné par la relation d'ordre opposée à la relation d'inclusion: $i \leq j$ si $i \supset j$.

Pour tout $i \in I$, soit u_i une fonction positive de $L^1(G)$ nulle dans $G - i$ et d'intégrale 1 [9]. Pour tout $f \in L^1(G)$, on a $\|u_i * f - \delta_s * f\|_1 \xrightarrow{i} 0$ et $\|f * u_i - f * \delta_s\|_1 \xrightarrow{i} 0$.

Soit $H' = vect \left((\Pi(f)\xi)_{f \in L^1_P(G), \xi \in H} \right)$. H' est partout dense dans H . Soit la suite $(h_i)_{i \in I}$ où $h_i = P(u_i) \forall i \in I$. Nous avons $\|h_i * f - \tilde{P}(\delta_s) * f\|_1 \xrightarrow{i} 0, \forall f \in L^1_P(G)$. Comme Π est continue on déduit que

$$\left\| \Pi(h_i)\Pi(f) - \Pi(\tilde{P}(\delta_s) * f) \right\|_{L^\infty(H)} \xrightarrow{i} 0, \forall f \in L^1_P(G).$$

Comme la convergence d'une suite d'opérateurs dans $L^\infty(H)$ entraîne sa convergence simple nous déduisons que pour tout

$$\xi \in H, \left\| \Pi(h_i)\Pi(f)\xi - \Pi(\tilde{P}(\delta_s) * f)\xi \right\|_H \xrightarrow{i} 0,$$

donc la suite $(\Pi(h_i))_{i \in I}$ converge pour la topologie de la convergence simple dans H' vers un opérateur $\Pi(s)$ dans H' tel que $\Pi(s)\Pi(f) = \Pi(\tilde{P}(\delta_s) * f)$.

Le fait que $\|f * h_i - f * \tilde{P}(\delta_s)\|_1 \xrightarrow{i} 0, \forall f \in L^1_P(G)$ entraîne que $\Pi(f)\Pi(s) = \Pi(f * \tilde{P}(\delta_s))$.

Pour tout $f \in L^1_P(G)$ et $\xi \in H$ on a,

$$\begin{aligned}
 \|\Pi(h_i)(\Pi(f)\xi)\|_{H'} &\leq \|\Pi(h_i)\|_{L^\infty(H)} \|\Pi(f)\xi\|_{H'} \\
 &\leq \|\Pi(f)\xi\|_{H'}
 \end{aligned}$$

par passage à la limite on a $\|\Pi(s)(\Pi(f)\xi)\|_{H'} \leq \|\Pi(f)\xi\|_{H'}$ donc $\|\Pi(s)\|_{L^\infty(H')} \leq 1$. $\Pi(s)$ se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu sur H que nous noterons encore $\Pi(s)$ tel que

$\|\Pi(s)\|_{L_\infty(H)} \leq 1$. L'application Π est bornée. Π est faiblement continue.

Comme $\Pi(s)\Pi(f) = \Pi(\tilde{P}(\delta_s) * f)$, $\forall f \in L_P^1(G)$ et H' est partout dense dans H on déduit que $\Pi(e) = id_H$.

$$\begin{aligned} \Pi(s^{-1})\Pi(f) &= \Pi(\tilde{P}(\delta_{s^{-1}}) * f) \\ &= \left(\Pi(f^* * \tilde{P}(\delta_s)) \right)^* \\ &= (\Pi(f^*)\Pi(s))^* \\ &= (\Pi(s))^* \Pi(f) \end{aligned}$$

donc, $\Pi(s^{-1}) = (\Pi(s))^*$ sur H' et par suite sur H .

Montrons que la représentation de l'algèbre $L_P^1(G)$ vérifie $\Pi(f) = \int_G f(s)\Pi(s)dm_G(s)$, $\forall f \in L_P^1(G)$. Comme $f * g = \int_G f(s)\tilde{P}(\delta_s) * gdm_G(s)$, alors nous avons

$$\begin{aligned} \Pi(f)\Pi(g) &= \Pi(f * g) \\ &= \int_G f(s)\Pi(\tilde{P}(\delta_s) * g) dm_G(s) \\ &= \int_G f(s)\Pi(s)\Pi(g) dm_G(s) \\ &= \left(\int_G f(s)\Pi(s)dm_G(s) \right) \Pi(g) \end{aligned}$$

donc, $\Pi(f) = \int_G f(s)\Pi(s)dm_G(s)$.

Pour $x, y \in G$, montrons que $P^*(L_{x^{-1}}(P^*\Pi))(y) = \Pi(x)\Pi(y)$. Il suffit de montrer que pour tout $f \in L_P^1(G)$ et pour tout $\xi, \eta \in H$ on a $\langle P^*(L_{x^{-1}}(P^*\Pi))(y) (\Pi(f)\xi), \eta \rangle = \langle \Pi(x)\Pi(y) (\Pi(f)\xi), \eta \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle P^*(L_{x^{-1}}(P^*\Pi))(y) (\Pi(f)\xi), \eta \rangle &= P^* \left((L_{x^{-1}}(P^*\Pi))_{\Pi(f)\xi, \eta} \right) (y) \\ &= P^* \left(L_{x^{-1}} \left((P^*\Pi)_{\Pi(f)\xi, \eta} \right) \right) (y) \\ &= P^* (L_{x^{-1}}(P^*\Pi_{\Pi(f)\xi, \eta})) (y) \\ &= \left\langle \tilde{P}(\delta_x) * \tilde{P}(\delta_y), \Pi_{\Pi(f)\xi, \eta} \right\rangle \\ &= \left\langle \Pi(\tilde{P}(\delta_x) * \tilde{P}(\delta_y) * f)\xi, \eta \right\rangle \\ &= \left\langle \Pi(x)\Pi(\tilde{P}(\delta_y) * f)\xi, \eta \right\rangle \\ &= \langle \Pi(x)\Pi(y)\Pi(f)\xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. L'unicité provient du fait que $\Pi(s)$ est défini comme étant la limite de la suite d'opérateurs $(\Pi(h_i))_{i \in I}$ relativement à la topologie forte.

VI. LIEN ENTRE LES FONCTIONS DE TYPE P-POSITIF ET LES P-REPRÉSENTATIONS DE G

Soit P un opérateur de $L^1(G)$ dans $L^1(G)$ qui vérifie les cinq conditions de la définition (1-2).

Théorème (6-1)

Soit (Π, H) une P -représentation du groupe G dans l'espace de l'espace de Hilbert H . Alors, pour tout vecteur $\xi \in H$ la fonction sur G , à valeurs dans \mathbb{C} , définie par $\varphi(x) = \langle \Pi(x)\xi, \xi \rangle_H$ est de type P -positif. Inversement, si $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est de type P -positif alors il existe un espace de Hilbert H_φ et Π_φ une P -représentation cyclique du groupe G dans H_φ de vecteur cyclique $\xi_\varphi \in H_\varphi$ tel que $\varphi(x) = \langle \Pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle_{H_\varphi}$ pour tout $x \in G$.

Preuve

L'implication directe. La fonction φ est évidemment continue et bornée. $P^*(\varphi) = \varphi$ en effet pour tout $x \in G$ on a

$$\begin{aligned} P^*(\varphi)(x) &= P^*(\Pi_{\xi, \xi})(x) \\ &= \langle P^*(\Pi)(x)\xi, \xi \rangle_H \\ &= \langle \Pi(x)\xi, \xi \rangle_H \text{ car } P^*(\Pi) = \Pi. \end{aligned}$$

Soient $x_1, \dots, x_n \in G$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \bar{a}_j P^*(L_{x_i} \varphi)(x_j) &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \bar{a}_j P^*(L_{x_i} \Pi_{\xi, \xi})(x_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \bar{a}_j \langle P^*(L_{x_i} \Pi)(x_j)\xi, \xi \rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \bar{a}_j \langle \Pi(x_i^{-1})\Pi(x_j)\xi, \xi \rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \bar{a}_j \langle \Pi(x_j)\xi, \Pi(x_i)\xi \rangle_H \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n \bar{a}_j \Pi(x_j)\xi, \sum_{i=1}^n a_i \Pi(x_i)\xi \right\rangle_H \\ &= \left\| \sum_{j=1}^n \bar{a}_j \Pi(x_j)\xi \right\|_H^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc φ est de type P -positif.

Implication réciproque. Soit $E_\varphi = \text{vect}((P^*(L_x \varphi))_{x \in G})$ c'est un espace préhilbertien. Soit H_φ le complété de E_φ et $\varrho_\varphi : G \rightarrow Gl(H_\varphi)$ l'homomorphisme déjà construit dans la section 4. On peut voir facilement que $\varrho_\varphi \in L^\infty(G, L_\infty(H_\varphi))$. On pose $\Pi_\varphi = P^*(\varrho_\varphi)$. Montrons que Π_φ est une P -représentation.

- Π_φ est faiblement continue et bornée.

-Pour tout élément $x \in G$ on a $\Pi_\varphi(x) = \varrho_\varphi(\tilde{P}(\delta_x))$ donc $\Pi_\varphi(e) = \varrho_\varphi(\tilde{P}(\delta_e))$. Comme ϱ_φ est bien un homomorphisme d'algèbre involutif de $M_{\tilde{P}}^1(G)$ dans $L_\infty(H_\varphi)$ et $\tilde{P}(\delta_e)$ est un élément unité de l'algèbre $M_{\tilde{P}}^1(G)$ alors $\Pi_\varphi(e) = \varrho_\varphi(\tilde{P}(\delta_e)) = id_{H_\varphi}$.

-Pour tout élément $x \in G$ on a

$$\begin{aligned} \Pi_\varphi(x^{-1}) &= \varrho_\varphi(\tilde{P}(\delta_{x^{-1}})) \\ &= \varrho_\varphi(\tilde{P}(\delta_x^*)) \\ &= \varrho_\varphi(\tilde{P}(\delta_x)^*) \\ &= (\varrho_\varphi(\tilde{P}(\delta_x)))^* \\ &= (\Pi_\varphi(x))^* . \end{aligned}$$

-Soient $x, y \in G$ nous avons $P^*(L_{x^{-1}} P^* \Pi_\varphi)(y) = P^*(L_{x^{-1}} (P^* \varrho_\varphi))(y)$. Donc, pour tout $\xi, \eta \in H_\varphi$ on a

$$\begin{aligned}
 \langle P^*(L_{x^{-1}}P^*\Pi_\varphi)(y)\xi, \eta \rangle_{H_\varphi} &= \langle P^*(L_{x^{-1}}(P^*\varrho_\varphi))(y)\xi, \eta \rangle_{H_\varphi} \\
 &= P^*((L_{x^{-1}}(P^*\varrho_\varphi))_{\xi, \eta})(y) \\
 &= P^*((L_{x^{-1}}(P^*((\varrho_\varphi)_{\xi, \eta}))) (y) \\
 &= \left\langle \tilde{P}(\delta_x) * \tilde{P}(\delta_y), (\varrho_\varphi)_{\xi, \eta} \right\rangle \\
 &= \int_G \int_G (\varrho_\varphi)_{\xi, \eta}(st) d\tilde{P}(\delta_x)(s) d\tilde{P}(\delta_y)(t) \\
 &= \int_G \int_G \langle \varrho_\varphi(st)\xi, \eta \rangle_{H_\varphi} d\tilde{P}(\delta_x)(s) d\tilde{P}(\delta_y)(t) \\
 &= \int_G \int_G \langle \varrho_\varphi(s)(\varrho_\varphi(t)\xi), \eta \rangle_{H_\varphi} d\tilde{P}(\delta_x)(s) d\tilde{P}(\delta_y)(t) \\
 &= \int_G \left(\int_G \langle (\varrho_\varphi(t)\xi), (\varrho_\varphi(s))^* \eta \rangle_{H_\varphi} d\tilde{P}(\delta_y)(t) \right) d\tilde{P}(\delta_x)(s) \\
 &= \int_G \left\langle \varrho_\varphi(\tilde{P}(\delta_y))\xi, (\varrho_\varphi(s))^* \eta \right\rangle_{H_\varphi} d\tilde{P}(\delta_x)(s) \\
 &= \int_G \left\langle \varrho_\varphi(s)\varrho_\varphi(\tilde{P}(\delta_y))\xi, \eta \right\rangle_{H_\varphi} d\tilde{P}(\delta_x)(s) \\
 &= \int_G \langle \varrho_\varphi(s)\Pi_\varphi(y)\xi, \eta \rangle_{H_\varphi} d\tilde{P}(\delta_x)(s) \\
 &= \left\langle \varrho_\varphi(\tilde{P}(\delta_x))\Pi_\varphi(y)\xi, \eta \right\rangle_{H_\varphi} \\
 &= \langle \Pi_\varphi(x)\Pi_\varphi(y)\xi, \eta \rangle_{H_\varphi}
 \end{aligned}$$

d'où

$$P^*(L_{x^{-1}}P^*\Pi_\varphi)(y) = \Pi_\varphi(x)\Pi_\varphi(y) \forall x, y \in G.$$

On voit que (Π_φ, H_φ) est une P -représentation du groupe dans l'espace de Hilbert H_φ . Notons par $\xi_\varphi = \varphi$ et

$$H'_\varphi = \overline{\text{vect}(\Pi_\varphi(x)\xi_\varphi)_{x \in G}}.$$

H'_φ est un espace de Hilbert stable par Π_φ . En effet, soit H'^\perp_φ l'orthogonal de H'_φ dans H_φ . Soit $\Pi_\varphi(y)\xi_\varphi \in H'_\varphi$. Montrons que $\Pi_\varphi(x)\Pi_\varphi(y)\xi_\varphi \in H'_\varphi \forall x, y \in G$. Pour cela, soit $\eta \in H'^\perp_\varphi$. On a

$$\begin{aligned}
 \langle \Pi_\varphi(x)\Pi_\varphi(y)\xi_\varphi, \eta \rangle_{H'_\varphi} &= \langle P^*(L_{x^{-1}}P^*\Pi_\varphi)(y)\xi_\varphi, \eta \rangle_{H_\varphi} \\
 &= P^*(L_{x^{-1}}(P^*((\Pi_\varphi)_{\xi_\varphi, \eta}))) (y) \\
 &= \left\langle \tilde{P}(\delta_x) * \tilde{P}(\delta_y), (\Pi_\varphi)_{\xi_\varphi, \eta} \right\rangle \\
 &= \int_G \langle \Pi_\varphi(s)\xi_\varphi, \eta \rangle_{H_\varphi} d(\tilde{P}(\delta_x) * \tilde{P}(\delta_y))(s) \\
 &= 0;
 \end{aligned}$$

donc, $\Pi_\varphi(x)\Pi_\varphi(y)\xi_\varphi \in H'_\varphi$. Pour tout élément $x \in G$ on a $\varphi(x) = \langle \xi_\varphi, \Pi_\varphi(x)\xi_\varphi \rangle_{H'_\varphi}$

Nous déduisons que $(\Pi_\varphi, \xi_\varphi, H'_\varphi)$ est une représentation cyclique du groupe G dans l'espace de Hilbert H'_φ de vecteur cyclique ξ_φ .

Lemme (6-2)

Soient (Π_1, ξ_1, H_1) et (Π_2, ξ_2, H_2) deux P -représentations cycliques du groupe G tels que $\langle \xi_1, \Pi_1(x)\xi_1 \rangle_{H_1} = \langle \xi_2, \Pi_2(x)\xi_2 \rangle_{H_2} \forall x \in G$. Alors, les P -représentations (Π_1, ξ_1, H_1) et (Π_2, ξ_2, H_2) sont unitairement équivalentes.

Théorème de l'unicité (6-3)

Soit $\varphi \in P(G, P)$. Si (Π, ξ, H) est une P -représentation cyclique du groupe G dans un espace de

Hilbert H telle que $\varphi(x) = \langle \xi, \Pi(x)\xi \rangle_H \forall x \in G$; alors, (Π, ξ, H) est unitairement équivalente à la P -représentation $(\Pi_\varphi, H_\varphi, \xi_\varphi)$ du théorème précédent.

Preuve: En utilisant le lemme (6-2) on déduit facilement le résultat.

VII. REFERENCES

- ¹ M.AIT SIBAHA, thèse de doctorat d'état, université Ibn Tofaïl-Kénitra 2001, fonctions de type μ -positifs.
- ² M. AKKOUCHI, thèse de doctorat d'état, université Ibn Tofaïl-Kénitra Maroc 1994, mesures de Gel'fand et fonctions sphériques généralisées.
- ³ M. AKKOUCHI, sur la transformation de Fourier sphérique associée à une mesure de Gel'fand. Africa Mathematica, série 4, vol 1-13, (1994).
- ⁴ M. AKKOUCHI et A. BAKALI, une généralisation des paires de Gel'fand, bolletino, U.M.I (7), B, 795-822 (1992).
- ⁵ A. BAKALI et B. BOUIKHALENE, on the generalized D'Alambert functional equation, université Ibn Tofaïl-Kénitra, Maroc, 2000.
- ⁶ C. BENSON, J. JENKINS and G. RATCLIFF, on the Gelfand pairs associated with solvable Lie groups, transactions of the american mathematical society, volume 321, number 1, september 1990, 85-116.
- ⁷ J. L. CLERC, groupes compacts, CIMPA Nancy 1 France, 1980.
- ⁸ J. DIEUDONNE, éléments d'analyse, tome 2, 1968.
- ⁹ J. DIXMIER, les C^* -algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, 1964.
- ¹⁰ T. DAAMACHE, thèse de doctorat, université Ibn Tofaïl-Kénitra Maroc 2001, applications des groupes affines aux fonctions et polynômes d'Hermite et à leurs généralisations.
- ¹¹ EL. EL QORACHI, thèse de doctorat de troisième cycle, université Cadi Ayyad Maroc 1995, éléments de Gel'fand dans une algèbre de Banach involutive et certaines questions d'Analyse Harmonique.
- ¹² J. FARAUT, analyse harmonique sur les paires de Gel'fand et les espaces hyperboliques les cours de CIMPA Nancy 1 France, 1982.
- ¹³ R. GODEMENT, thèse les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Nancy France.
- ¹⁴ D. GURARIE, Symetries and laplacians, introduction to harmonic analysis, group representations and applications, 1992.
- ¹⁵ S. KABBAJ et A. AKHLIDJ, les paires centrales généralisées à paraître
- ¹⁶ M. RAIS, représentation des groupes nilpotents et méthode des orbites, université de Nancy 1 France, CIMPA, 1980.
- ¹⁷ S.THANGAVELU, harmonic analysis on the Heisenberg group (1998).
- ¹⁸ L. SCHWARTZ, analyse, topologie générale et analyse fonctionnelle, 1970.