African Journal Of Mathematical Physics Volume **7** N^0 1*(2009)39-47*

Hamiltoniens classiques et géométrie k-symplectique

A. Awane[a,†], A. Ammar[a], E. Azizi [a], S. Essabab[a], A. Ouhadan[b], E. H. El Kinani[b,‡], M. Rahmoune[c]

[a] *Equipe de Géométrie Différentielle et Applications,*
Faculté des Sciences Ben M'Sik. Casablanca, Maroc.
[b] *Département de Mathématiques, Groupe d'Algèbre et Applications*
[c] *UFR de Sciences de l'Ingénieur,*
Université Moulay Ismail, Faculté des Sciences et Techniques,
Boutalamine B.P.509, Errachidia, Maroc.
[†] *a.awane@univh2m.ac.ma,* [‡] *hkinani@ictp.trieste.it*

abstract

We put in obvIously hamilonian maps of classical mecanics in the context of the polarized Poisson manifolds.
Keywords : Hamiltonian systems, Poisson manifolds, symplectic structures. Generalized Hamiltonian Dynamics of Nambu.
Mathematics Subject Classification: 53D10, 53D17, 70G45, 70H05.

I. INTRODUCTION

La notion de variété polarisée joue un rôle important role dans la quantification géométrique de Kostant-Souriau, voir par exemple[13,18]. Des propriétés imortantes sont données par A. Weinstein, P. Dazord, J.M. Morvan, P. Molino et P. Libermann.

Rappelons que l'une des motivations principales qui ont conduit à l'introduction des structures k-symplectiques, en tant qu'extension de la géométrie de polarisation[6] est de proposer un support géométrique des équations de Nambu[14], par analogie avec le formalisme hamiltonien classique qui se dégage de la géométrie symplectique. Des propriétés d'une structures de Poisson polarisée subordonnée à une variété $k-$symplectique ont conduit à introduire la notion de structure de Poisson polarisée vectorielle.

Une structure $k-$symplectique constutue une géométrie dans laquelle cohabite des 2-formes différentielles $\theta^1, \ldots, \theta^k$, telle que l'application hamiltonienne H est à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, et dont les composantes sont reliés avec le système hamiltonien X_H par :

$$i\,(X_H)\,\theta^p = -dH^p, \qquad p = 1, \ldots k$$

afin de retrouver les équations de Nambu-Hamilton tout en présevant l'aspect spécifique de la géométrie symplectique classique.

Une structure $k-$symplectique sur une variété de dimension $n\,(k+1)$, munie d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension n, est un $(k+1)-$uplet $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$ dans lequel $\theta^1, \ldots, \theta^k$ forment un système non dégénéré s'annulant sur les champs tangents aux feuilles, où E est le sous fibré de TM défini par $\mathfrak{F}$.

Le théorème de Darboux généralisé montre que tout point x_0 de M possède un voisinage ouvert de coordonnées locales $(x_i^p, y^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ tel que les formes différentielles θ^p soient représentées dans U par

$$\theta^p_{|U} = \sum_{i=1}^{n} dx_i^p \wedge dy^i$$

et le sous-fibré E soit défini par les équations $dy^1 = \ldots = dy^n = 0$.

Depuis son introduction en 1984[2], la géométrie $k-$symplectique a connu beaucoup de développements[3],[4],[6]), comme elle a joué le support de la quantification géométrique de Kostant-Souriau-Puta[16] et elle fut utilisée dans les travaux de M. de Léon[8], Michael McLean et L.K. Norris[15], P.R. Rodriguez[19], Angel Rey Roca et Modesto Salgado et I.V. Kanachikov[9].

Dans un ouvert U de M muni d'un système de coordonnées locales adaptées $(x_i^p, y^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$, les composantes H^p de H et X_H s'écrivent respectivement :

$$H^p = \sum_{j=1}^{n} f_j(y^1, \ldots, y^n)x_j^p + g^p(y^1, \ldots, y^n).$$

Cette forme est restrictive dans le sens où ces applications sont localement affines sur les feuilles et par conséquant, elles ne remplissent pas l'espace $C^\infty\left(M, \mathbb{R}^k\right)$; on peut se demander si les hamiltoniens, qu'on rencontre dans la mécanique classique, rentrent dans ce context?

L'objet de ce travail est de mettre en évidence des applications hamiltoniennes qui ne sont pas localement affines sur les feuilles de $\mathfrak{F}$ et de montrer que les hamiltoniens connus en mécanique classique trouvent leurs places dans le cadre des variétés de Poisson polarisées vectorielles

II. VARIÉTÉS POLARISÉES

Soit M une variété différentiable de dimension $p+q$ muni d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension q. Le sous fibré de TM défini par les vecteurs tangents aux feuilles de $\mathfrak{F}$ sera désigné par E, l'ensemble des sections du $M-$fibré $TM \longrightarrow M$ (resp. $E \longrightarrow M$) sera désigné par $\mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ (resp. $\Gamma(E)$)

Soit M une variété polarisée, c'est à dire que M est de dimension paire $2n$ munie du couple (θ, E) dans lequel, θ est une 2-forme différentielle fermée non dégénérée, et E est un sous-fibré intégrable de TM de codimension n s'annulant sur les champs tangents aux feuilles:

$$\theta(X,Y) = 0, \forall X, Y \in \Gamma(E).$$

Le théorème de Darboux montre que, pour tout x de M, il existe un voisinage ouvert de x et un système de coordonnées locales $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$ tel que

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$$

et le sous fibré E est défini par les équations:

$$dy^1 = ... = dy^n = 0.$$

Une fonction f de classe C^∞ sur M est dite basique pour le feuilletage $\mathfrak{F}$ si $Y(f) = 0$, pour tout $Y \in \Gamma(E)$.

L'anneau des fonctions basiques est noté $\mathfrak{B}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$.

Proposition 1 *Soit f une fonction de $C^\infty(M)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est basique.*
2. *f est constante sur chaque feuille de $\mathfrak{F}$.*

3. *Dans un système de coordonnées locales adaptées* $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$, f *ne dépend que des variables* $(y^1, ..., y^n)$.

Un système hamiltonien X de la structure symplectique θ, est dit polarisé s'il est en plus feuilleté c'est à dire :

$$[X, Y] \in \Gamma(E) \text{ pour tout } Y \in \Gamma(E).$$

L'application hamiltonienne H et le système hamiltonien associé X_H sont liés par la relation :

$$i(X_H)\theta = -dH.$$

L'ensemble des applications hamiltoniennes est noté $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$.
Les applications hamiltonniennes polarisées de (θ, E) s'écrivent :

$$H = \sum_{i=1}^{n} a_i(y^1, ..., y^n)x^i + b(y^1, ..., y^n),$$

où $a_1, ..., a_n$ et b sont des fonctions basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$.

Remarque II.1 *L'espace* $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ *est strictement inclus dans* $C^\infty(M)$ *: les applications hamiltonniennes polarisées de* (θ, E) *sont "linéaires" par rapport aux coordonnées* $\left(x^1, ..., x^n\right)$.

III. VARIÉTÉS DE POISSON POLARISÉES VECTORIELLES

Soit V l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^k$, soit $(e_r)_{1\leq r\leq n}$ la base canonique de V et $(\omega^r)_{1\leq r\leq n}$ sa base duale.
Soient $(M, \mathfrak{F})$ une variété feuilletée de dimension m munie d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de dimension p, $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ le sous $\mathfrak{B}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$-module de $C^\infty(M, V)$ et On dénote par

$$\Lambda_1(M, V) = \Lambda_1(M) \otimes V$$

l'espace des 1-formes différentielle sur M à valeurs dans V.
On dénote par E_V^o l'annulateur du sous fibré E dans $\Lambda_1(M, V)$, c'est à dire, l'espace des 1-formes à valeurs dans V s'annulant sur les champs tangents aux feuilles de $\mathfrak{F}$.

Définition III.1 *On appelle structure de Poisson polarisée vectorielle sur* M *un couple* $(\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}), P)$ *dans lequel*

$$\begin{array}{rcl} P : \Lambda_1(M, V) \times \Lambda_1(M, V) & \longrightarrow & C^\infty(M, V) \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & P(\alpha, \beta) \end{array}$$

est une application $C^\infty(M)$*-bilinéaire antisymétrique telle que:*

1. $P(\alpha, \beta) = 0$ *pour tous* $\alpha, \beta \in E_V^o$.
2. *pour tous* $H, K \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}), P(dH, dK) = \{H, K\}$;
3. *la correspondance* $(H, K) \longrightarrow \{H, K\}$ *de* $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F}) \times \mathfrak{H}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$ *à* $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ *confère à* $\mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ *une structure d'algèbre de Lie;*
4. *à tout élément* $H \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$ *est associé un champ de vecteurs* X_H *tel que*

$$\langle dK, X_H \rangle = \{H, K\}.$$

pour tout $K \in \mathfrak{H}(M, \mathfrak{F})$.

P sera appelé le tenseur de Poisson polarisé.

Dans un voisinage ouvert U de M muni d'un système de coordonnées locales $\left(x^1,...,x^p,y^1,...,y^q\right)$, le tenseur P s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} P = {} & A^{ijr}_{ls}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\omega^l\right)\wedge\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\otimes\omega^s\right)\right)\otimes e_r \\ & +B^{ijr}_{ls}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\omega^l\right)\wedge\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\otimes\omega^s\right)\right)\otimes e_r \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec $A^{ijr}_{ls} = P^r\left(dx^i\otimes e_l, dx^j\otimes e_s\right), B^{ijr}_{ls} = P^r\left(dx^i\otimes e_l, dy^j\otimes e_s\right)$ et P^r sont les composantes de P.
De l'identité de Jacobi du crochet de Lie $\{,\}$ on trouve

$$\begin{aligned} & \tfrac{\partial A^{abr}_{uv}}{\partial x^l}A^{lcv}_{rw} - \tfrac{\partial A^{abr}_{uv}}{\partial y^m}B^{cmv}_{wr} + \tfrac{\partial A^{bcr}_{vw}}{\partial x^l}A^{lav}_{ru} \\ & -\tfrac{\partial A^{bcr}_{uv}}{\partial y^m}B^{amv}_{ur} + \tfrac{\partial A^{car}_{wu}}{\partial x^l}A^{lbv}_{rv} - \tfrac{\partial A^{car}_{wv}}{\partial y^m}B^{bmv}_{vr} = 0 \\ & \tfrac{\partial A^{abr}_{uv}}{\partial x^l}B^{lcv}_{rw} + \tfrac{\partial B^{bcr}_{uv}}{\partial y^m}B^{bcr}_{ur} - \tfrac{\partial B^{acr}_{uw}}{\partial x^l}A^{lbv}_{rv} + \tfrac{\partial B^{acr}_{uw}}{\partial y^m}B^{bmv}_{vr} = 0 \\ & \tfrac{\partial B^{abv}_{uv}}{\partial x^l}A^{lbv}_{rv} - \tfrac{\partial B^{acr}_{uw}}{\partial x^l}B^{lbv}_{rv} = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

IV. VARIÉTÉS DE POISSON POLARISÉES VECTORIELLES MODÈLES

On sait que les applications hamiltonniennes polarisées de (θ, E) sont "linéaires" par rapport aux coordonnées $\left(x^1,...,x^n\right)$; elles ont la fome restrictive suivantes

$$H = \sum_{i=1}^{n} a_i(y^1,...,y^n)x^i + b(y^1,...,y^n),$$

où $a_1,...,a_n$ et b sont des fonctions basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$.
On se propose ici de mettre en évidence des applications plus générales.
On considère l'espace modèle $M = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ muni du feuilletage modèle $\mathfrak{F}$ défini par les équations $dy^1 = \ldots = dy^q = 0$, où $\left(x^i, y^j\right)$, avec $i = 1,\ldots,p$ et $j = 1,\ldots,q$, sont les coordonnées cartésiennes.
Soit $(\mathfrak{H}(M,\mathfrak{F}),\mathfrak{P})$ une structure de Poisson polarisée vectorielle sur M où $\mathfrak{H}(M,\mathfrak{F})$ est un sous $\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\mathfrak{F})$-module de $C^\infty(\ M)$, avec le tenseur P est défini par (3.1) et $\mathfrak{H}\left(M,\mathfrak{F}\right)$ est un sous module de $\mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{M},\mathcal{V}\right)$ sur l'anneau $\mathfrak{B}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right)$ des fonctions basiques.
Nous donnons ici des exemples de structures de Poisson polarisées vectorielles sur M élargissant l'espaces des applications hamiltoniennes subordonnées aux structures $k-$symplectiques.

1. Soit $\mathfrak{H}\left(M,\mathfrak{F}\right)$ le sous $\mathfrak{B}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right)-$module de $\mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{M},\mathcal{V}\right)$ engendré par $e_1\ldots,e_k$. Dans ce cas, $\mathfrak{H}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right) = \mathfrak{B}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right)\times\ldots\times\mathfrak{B}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right)$ (k fois) et pour tout bivecteur de Poisson polarisé P, l'algèbre de Lie associée est abélienne.

2. Pour $k = 2$, on considère le sous $\mathfrak{B}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right)-$module $\mathfrak{H}\left(M,\mathfrak{F}\right)$ de $\mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{M},\mathcal{V}\right)$ engendré par les applications :

$$X^I : (x,y) \longmapsto x^I e_1 \ \ (I = 1,\ldots,p)\,.$$

$$X^{ij} : (x,y) \longmapsto x^i x^j e_2 \ \ (i,j = 1,\ldots,p)$$

   et par les vecteurs e_1, e_2. Les composantes H^1 et H^2 de chaque élément H de $\mathfrak{H}\left(M,\mathfrak{F}\right)$ prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned} H^1 &= \sum_{i=1}^{p} f_i(y^1,\ldots,y^q)x^i + g^1(y^1,\ldots,y^q) \quad (i = 1,\ldots,p) \\ H^2 &= \sum_{i,j=1}^{p} f_{ij}(y^1,\ldots,y^q)x^i x^j + g^2(y^1,\ldots,y^q) \quad (i,j = 1,\ldots,p) \end{aligned}\ .$$

   où $f_i, f_{ij}, g^1, g^2 \in \mathfrak{B}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right)$.

3. Supposons que $p = mk$. On dénote par $(x,y) = \left(x^{ra}, y^1, \ldots, y^q\right)_{1\leq a\leq m,\, 1\leq r\leq k}$ les coordonnées Cartésiennes de M. Soit $\mathfrak{H}\left(M,\mathfrak{F}\right)$ le sous $\mathfrak{B}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right)$ −module de $\mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{M},\mathcal{V}\right)$ engendré par les applications

$$X^a : (x,y) \longmapsto \sum_{r=1}^{k} x^{ra} e_r \;\; (a = 1,\ldots,m)$$

et par les vecteurs $e_1,\ldots,e_k$. Les composantes H^r de chaque élément H de $\mathfrak{H}\left(M,\mathfrak{F}\right)$ s'écrivent sous la forme :

$$H^r = \sum_{a=1}^{m} f_a(y^1,\ldots,y^n)x^{ra} + g^r(y^1,\ldots,y^n) \quad (r = 1,\ldots,k)\,.$$

où $f_a,\ g^r \in \mathfrak{B}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right)$.

4. Dans les notations ci-dessus, nous considérons le sous $\mathfrak{B}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right)$ −module de $\mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{M},\mathcal{V}\right)$, $\mathfrak{H}\left(M,\mathfrak{F}\right)$, engendré par les applications

$$X^{ab} : (x,y) \longmapsto \sum_{r=1}^{k} x^{ra}x^{rb} e_r \;\; (a,b = 1,\ldots,m)$$

et par les vecteurs $e_1,\ldots,e_k$. Les composantes H^r de chaque élément H de $\mathfrak{H}\left(M,\mathfrak{F}\right)$ s'écrivent sous la forme :

$$H^r = \sum_{a,b=1}^{m} f_{ab}(y^1,\ldots,y^n)x^{ra}x^{rb} + b^r(y^1,\ldots,y^n) \quad (r = 1,\ldots,k)\,.$$

où $f_{ab}, g^r \in \mathfrak{B}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right)$.

5. Dans les notations ci-dessus, nous considérons le sous $\mathfrak{B}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right)$ −module $\mathfrak{H}\left(M,\mathfrak{F}\right)$ de $\mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{M},\mathcal{V}\right)$ engendré par les applications

$$X^a : (x,y) \longmapsto \sum_{r=1}^{k} x^{ra} e_r \;\; (a = 1,\ldots,m)$$

$$X^{ab} : (x,y) \longmapsto \sum_{r=1}^{k} x^{ra}x^{rb} e_r \;\; (a,b = 1,\ldots,m)$$

et par les vecteurs $e_1,\ldots,e_k$. Les composantes H^r de chaque élément H de $\mathfrak{H}\left(M,\mathfrak{F}\right)$ s'écrivent sous la forme :

$$H^r = \sum_{a=1}^{m} f_a(y^1,\ldots,y^n)x^{ra} + \sum_{a,b=1}^{m} f_{ab}(y^1,\ldots,y^n)x^{ra}x^{rb} + b^r(y^1,\ldots,y^n),$$

où $(r = 1,\ldots,k)$ et $f_a, f_{ab}, g^r \in \mathfrak{B}\left(\mathfrak{M},\mathfrak{F}\right)$.

V. HAMILTONIENS CLASSIQUES ET VARIÉTÉS DE POISSON POLARISÉES

L'objet de cette partie est de mettre dans le cadre des structures de Poisson polarisées, les équations de mouvement de la mécanique classique à partir du hamiltonien du système étudié dans l'espace de phase.

Le système décrit une trajectoire dans l'espace $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui est muni du feuilletage $\mathfrak{F}$ de dimension n défini par les équations $dy^1 = ... = dy^n = 0$, où $\left(x^i, y^i\right)$, avec $i, j = 1, ..., n$, est le système de coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^{2n}$.

Soit $\left(\mathfrak{H}(\mathbb{R}^{2n},\mathfrak{F}),\mathfrak{P}\right)$ une structure de Poisson polarisée vectorielle sur $\mathbb{R}^{2n}$ où $\mathfrak{H}(\mathbb{R}^{2n},\mathfrak{F})$ est un sous $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{2n},\mathfrak{F})$-module de $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, avec le tenseur P est défini par la formule (3.1).

Les équations de Hamilton dans l'espace de phase $\mathbb{R}^{2n}$ sont données par:

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y^i}, \\ \frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x^i}; \end{cases}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$.

Par un choix convenable de générateurs de $\mathfrak{H}(\mathbb{R}^{2n},\mathfrak{F})$, on retrouve les applications hamiltonniennes connues en mécanique classique.

Exemples V.1 *1. On considère le sous $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{6n},\mathfrak{F})$-module de $C^\infty(\mathbb{R}^{6n})$, $\mathfrak{H}(\mathbb{R}^{6n},\mathfrak{F})$, engendré par les applications :*

$$X^i : (x,y) \longmapsto \left(x^i\right)^2, i = 1, ..., 3n$$

et par 1.

Pour tout $H \in \mathfrak{H}(\mathbb{R}^{6n},\mathfrak{F})$, on a :

$$H = \sum_{i=1}^{3n} f_i(y^1,...,y^{3n})\left(x^i\right)^2 + k(y^1,...,y^{3n}),$$

où f_i , $k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{6n},\mathfrak{F})$.

En particulier, pour

$$f_i(y^1,...,y^{3n}) = \frac{1}{2M_i} \quad et \quad k(y^1,...,y^{3n}) = V(y)$$

où $V : \mathbb{R}^{3n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction d'énergie potentiel, on retrouve l'hamiltonien d'un système de n particules se mouvant dans un champ potentiel V^{11} :

$$H = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\left(x^i\right)^2}{2M_i} + V(y).$$

En particulier pour $n = 1$, on retrouve l'hamiltonien d'une particule de masse m dans un champ potentiel V :

$$H = \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(x^i\right)^2}{2m} + V(y)$$

2. On prend pour générateurs du sous $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{2n},\mathfrak{F})$-module de $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\mathfrak{H}(\mathbb{R}^{2n},\mathfrak{F})$, les applications

$$X^i : (x,y) \longmapsto \left(x^i\right)^2, \ pour\ i = 1, ..., n$$

et 1.

On a pour tout $H \in \mathfrak{H}(\mathbb{R}^{2n},\mathfrak{F})$,

$$H = \sum_{i=1}^{n} f_i(y^1,...,y^n)\left(x^i\right)^2 + k(y^1,...,y^n).$$

où f_i , $k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{2n},\mathfrak{F})$.

i) Pour $f_i(y) = \frac{1}{2}$ et

$$k(y) = \frac{g^2}{2} \sum_{i,j=1; i\neq j}^{n} \frac{1}{(y^i - y^j)^2},$$

on retrouve le modèle de Calogero-Moser[12]*, c'est un système de n particules identiques se mouvant sur une ligne et dont l'hamiltonien s'écrit comme suit :*

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x^i\right)^2}{2} + \frac{g^2}{2} \sum_{i,j=1;i\neq j}^{n} \frac{1}{(y^i - y^j)^2},$$

où g est la constante de couplage.

ii) Pour $f_i(y) = \frac{1}{2}$ et

$$k(y) = \frac{g^2}{2} \sum_{i,j=1;i\neq j}^{n} \frac{1}{(y^i - y^j)^2} + \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(y^i\right)^2,$$

on retrouve l'hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x^i\right)^2}{2} + \frac{g^2}{2} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{(y^i - y^j)^2} + \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(y^i\right)^2$$

d'un oscilateur libre décrit par l'équation

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + \omega^2 Y(t) = 0.$$

Cas particulier. *Pour $n = 1$ on a*

$$H = \frac{x^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} y^2,$$

c'est l'hamiltonien d'un oscilateur harmonique.

3. *Pour $n = 2$, on considère $\mathfrak{H}(\mathbb{R}^4, \mathfrak{F})$, le sous $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^4, \mathfrak{F})$-module de $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ engendré par Les fonctions:*

$$X^i : (x, y) \longmapsto \left(x^i\right)^2, \quad i = 1, 2.$$

et par 1.

Pour tout $H \in \mathfrak{H}(\mathbb{R}^4, \mathfrak{F})$,

$$H = f_1(y^1, y^2)\left(x^1\right)^2 + f_2(y^1, y^2)\left(x^2\right)^2 + k(y^1, y^2),$$

où f_i, $k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^4, \mathfrak{F})$.

En particulier, et selon un choix convenable de fonctions basiques, on a :

i) Pour

$$f_i(y^1, y^2) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2$$

et

$$k(y^1, y^2) = \frac{1}{2}\left(A\left(y^1\right)^2 + B\left(y^2\right)^2\right) - \left(y^1\right)^2 y^2 - \frac{\lambda}{3}\left(y^2\right)^3,$$

où A, B et λ sont des constantes, on retrouve l'hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^{2} \frac{\left(x^i\right)^2}{2} + \frac{1}{2}\left(A\left(y^1\right)^2 + B\left(y^2\right)^2\right) - \left(y^1\right)^2 y^2 - \frac{\lambda}{3}\left(y^2\right)^3.$$

Le système hamiltonien associé à H *est*

$$\begin{cases} \frac{dy^1}{dt} = x^1 \\ \frac{dy^2}{dt} = x^2 \\ \frac{dx^1}{dt} = 2x^1x^2 - Ay^1 \\ \frac{dx^2}{dt} = \left(y^1\right)^2 + \lambda\left(y^2\right)^2 - By^2 \end{cases}$$

s'appelle système de Hénon-Heiles qui est intégrable pour $A = B$ *et* $\lambda = 1$[1].

ii) Pour

$$f_i(y^1, y^2) = \frac{1}{2}, i = 1, 2$$

et

$$k(y^1, y^2) = \frac{1}{2}a_1\left(y^1\right)^2 + \frac{1}{2}a_2\left(y^2\right)^2 + \frac{1}{4}\left(y^1\right)^4 + \frac{1}{4}a_3\left(y^2\right)^4 + \frac{1}{2}a_4\left(y^1\right)^2\left(y^2\right)^2$$

où $a_1, ..., a_4$ *sont des constantes de* $\mathbb{R}$, *on retrouve le système généralisé de Yang-Mills associé au hamiltonien*[10]

$$H_a = \frac{1}{2}\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right) + \frac{1}{2}a_1\left(y^1\right)^2 + \frac{1}{2}a_2\left(y^2\right)^2$$
$$+\frac{1}{4}\left(y^1\right)^4 + \frac{1}{4}a_3\left(y^2\right)^4 + \frac{1}{2}a_4\left(y^1\right)^2\left(y^2\right)^2$$

Le système est intégrable dans les trois cas :

1. $a_1 = a_2, \quad a_3 = a_4 = 1;$
2. $a_1 = a_2, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 3;$
3. $a_1 = \frac{a_2}{4}, \quad a_3 = 16, \quad a_4 = 6.$

4. *Soit* $\left(\mathbb{R}^2, \mathfrak{F}\right)$ *la variété feuilletée munie du système de coordonnées cartésiennes* (x, y) *et du feuilletage de codimension* 1 *défini par* $dy = 0$ *et* $\mathfrak{H}(\mathbb{R}^2, \mathfrak{F})$ *est le sous* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2, \mathfrak{F})$*-module de* $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ *engendré par la fonction*

$$X : (x, y) \longmapsto x^2$$

et par 1.

Pour tout $H \in \mathfrak{H}(\mathbb{R}^2, \mathfrak{F})$, *on a :*

$$H = f(y)x^2 + h(y).$$

avec f , $h \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2, \mathfrak{F})$.

Pour $f(y) = \frac{1}{2}$ *et* $h(y) = -\omega_0^2 \cos y$, *on retrouve l'hamiltonien*[7]

$$H = \frac{x^2}{2} - \omega_0^2 \cos y$$

d'un pendule qui est décrit par l'équation du mouvement

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \sin y = 0.$$

REFERENCES

[1] M. Audin, Intégrabilité de systèmes hamiltoniens. Institut de recherche mathématique avancé. URM 7501 CNRS- Université louis Pasteur.

[2] A. Awane, Variétés de Poisson polarisées. arXiv:math.DG/0307119 v1 9 jul 2003.

[3] A. Awane, Generalized Polarized Manifolds. Rev. Mat. Complut. 21(2007), no. 1, 251-264.

[4] A. Awane & al, AJMP vol. 4 (2007) 33-43.

[5] A. Awane, Sur une généralisation des structures symplectiques. Thèse Strasbourg (1984).

[6] A. Awane - M. Goze. Pfaffian systems, k-symplectic systems. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/boston/London 2000.

[7] C. Chandre. Réduction du chaos hamiltonien, Centre de physique Théorique, Université Aix Marsielle 2/CNRS.

[8] M. DE LEÓN, E. MERINO, J. OUBIÑA, P.R. RODRIGUES and M.R. SALGADO, *Hamiltonian Systems on $k-$cosymplectic manifolds,* J. Math. Phys. 33, 4046-52 (1998).

[9] I.V. KANATCHIKOV, *On the Duffin-Petiau formulation of the covariant Hamiltonian Dynamics in field theory,* Rep. Mayh. Phys. 4149-90 (1998), hep-th99/11175.

[10] S. Kasperczuk. Intégrability of the Yang-Mills Hamiltonian system, Clestetial Mecanics and Dynamical Astrononmy, V. 58, N. 4 1994.

[11] W. D. Curtis et F. R. Miller. Differential Manifolds and Theoretical Phisics, Academic Press, INC. 1985.

[12] M. Kessabi et H. Sebbata. Systèmes Intégrables de Calogero, AJMP, Vol.1 No 2 (2004), 137-158.

[13] Géométrie de polarisation. Géométrie symplectique et quantification géométrique.Travaux en cours. Hermann Paris (1984) 37-53.

[14] Y. NAMBU. *Generalized Hamiltonian Dynamics. Physical Review* D , **7**, 8 (15 April 1973).

[15] L.K.NORRIS. *The n-symplectic algebra of observables in covariant Lagrangian field Theoty.* To appear in J. Math. Phys.

[16] M. PUTA Some Remarks on the k-symplectic manifolds. *Tensor.Vol 47* (1988) 109 - 115.

[17] H. Sabbata. Contribution à l'étude des systèmes hamiltoniens solubles et leurs déformations intégrales. Thèse. Faculté des Sciences Rabat Agdal. 2007.

[18] D.J. SIMMS -N.M.J. WOODHOUSE. *Lecture on geometric quantization.* Lecture Notes in Physics, n°53 (1976).

[19] P.R. RODREGUES, *Ageometry for Lagrangians on the bundle* $\mathbb{R}^n \times T^1_n\mathcal{M}$, Rendiconti di Matematica, Serie VII Volume, Roma (1998).