African Journal Of Mathematical Physics Vol **1** *No 2 (2004)137-158*

Systèmes Integrables de Calogero

Mohammed Kessabi[1,2], Hanane Sebbata [1,2]

1. *Lab/UFR-Physique des Hautes Energies, Faculté des Sciences de Rabat, Morocco.*

2. *Groupement National de Physique des Hautes Energies, GNPHE; Siege focal, Rabat, Morocco.*

Abstract

Dans cette revue, on se propose d'étudier une catégorie de systèmes hamiltoniens complètement intégrables connus sous le nom de systèmes de Calogero-Moser. De tels systèmes sont constitués d'un nombre fini de particules ponctuelles identiques se mouvant sur une ligne et soumises à des potentiels d'interactions coulombiens ou harmoniques.

Keywords: *Hamiltonian systems, Integrability, Calogero model.*

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'objet de la mécanique hamiltonienne est la description des systèmes mécaniques en termes de coordonnées généralisées q_i et leurs moments p_i. Bien que la formulation hamiltonienne de la mécanique classique contienne la même information physique que la formulation lagrangienne, elle se prête mieux à la formulation de la mécanique quantique non relativiste, de la mécanique statistique, de la théorie des perturbations, ... Un concept central en mécanique hamiltonienne est celui de systèmes complètement intégrables.

Les systèmes hamiltoniens complètement intègrables sont très rares dans la nature. La moindre perturbation d'un tel système détruit la plupart du temps son caractère intégrable. Leur rareté les rend d'autant plus précieux, puisque c'est bien souvent eux qui nous permettent de tester la validité des lois fondamentales de la physique. Ainsi, beaucoup de systèmes réalistes peuvent être perçus comme une petite perturbation d'un cas intégrable.

Depuis peu de temps, un regain d'intérêt considérable s'est manifesté pour l'étude des systèmes hamiltoniens complètement intégrables et ceci grâce à la découverte de certaines équations aux dérivées partielles non-linéaires de la physique des fluides, des plasmas, ..., qui peuvent être vus comme des systèmes hamiltoniens complètement intégrables à un nombre infini de degrés de liberté. Cette physique qualifiée de non-linéaire se développe de plus en plus. Son objet est varié, il comprend la turbulence hydrodynamique, la cinétique chimique, l'étude des circuits électroniques, ...
Il est donc logique de se poser la question suivante: Comment ces équations qui paraissent bien compliquées peuvent-elles faire l'objet d'une étude commune?
En effet, une analyse attentive a montré que l'évolution temporelle des systèmes considérés les rend semblables et permet d'unifier leur étude. Cette similitude résulte d'une théorie mathématique profonde: la théorie moderne des systèmes non linéaires, ou plus précisément la théorie quantique des systèmes dynamiques différentiables.
Notre travail se propose d'étudier une catégorie de systèmes hamiltoniens complètement intégrables connus sous le nom de systèmes de Calogero. De

tels systèmes sont constitués d'un nombre fini de particules ponctuelles identiques se mouvant sur une ligne et soumises à des potentiels d'interactions coulombiens ou harmoniques.
Cette étude se compose de quatre sections:

1-La méthode de projection de Olshanetsky et Perelomov (O-P)[1,2,3]:
Cette méthode de projection qui s'applique à d'autres problèmes physiques est manipulée dans les systèmes de Calogero pour déterminer explicitement les opérateurs de Lax L et M qui vont servir à la justification de l'intégrabilité. Elle nous conduira aussi à l'écriture de l'expression explicite de l'hamiltonien H (connaissance des constantes de couplage).

2-L'intégrabilité des systèmes de Calogero:
Ayant obtenu les expressions explicites de H, M, et L, on applique le théorème de Liouville pour calculer les quantités conservées $C_k = TrL^k$; $k = 1, 2...$. On montre que ces quantités conservées sont en involution, ce qui justifie l'intégrabilité du système (théorème de Liouville) [4,5].

3- L'étude quantique des systèmes de Calogero: Sachant
que notre système est complètement intégrable (vérifie le théorème de Liouville), on peut donc résoudre l'équation de Schrödinger $H\psi = E\psi$. Une telle résolution analytique nécessite des approximations (justifiées) qui seront introduites aux moments utiles. L'approximation fondamentale est la séparation des variables. Le système sera donc connu, par la détermination de son spectre d'énergie E_n et les états associés ψ_n. Nous verrons que nous serons confrontés à des difficultés de résolution générale d'équations différentielles; chose qui nous obligera à faire appel à des moyens algébriques.

4-L'approche algébrique des interactions de type $x^2 + \frac{\alpha}{x^2}$:
Dans l'étude quantique, la séparation des variables était nécessaire pour pouvoir résoudre l'équation de Schrödinger. Pour expliciter les états propres, nous utiliserons la méthode algébrique basée sur les opérateurs de création B_p^+ et d'annihilation B_p^- [6].

Cette étude se fera en deux étapes :
-Dans un premier temps, nous traiterons le cas d'une seule particule.
-Dans une seconde étape, nous passerons à la généralisation de N particules.
L'outil mathématique nécessaire à cette étude est basé sur les opérateurs pseudo-différentiels [5] et les algèbres de Lie de dimension finie [7].

I. PROJECTION DE OLSHANETSKY ET PERELOMOV

A. Introduction

Considérons, dans un espace de dimension finie, un système composé de N particules ponctuelles et décrit par un hamiltonien classique de la forme:

$$H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + V(q),$$

avec $q(t) \equiv (q_1(t), ..., q_N(t))$ et $p(t) = \dot{q}(t) \equiv (p_1(t), ..., p_N(t))$.
Naturellement, la connaissance de q(t) est déduite de la résolution des équations différentielles ordinaires $\ddot{q} = -\nabla V(q(t))$, sachant le potentiel V(q) et les conditions initiales $q(0) = a, \dot{q}(0) = p(0) = b$. Malheureusement, il se trouve qu'il est impossible de déterminer q(t) analytiquement dans la plupart des situations. De plus, il faut distinguer entre les cas où il est possible d'écrire q(t) explicitement en termes de fonctions connues et les cas où l'on obtient ces solutions à l'aide des opérations algébriques, d'évaluation d'intégrales de fonctions connues,.... Déjà, on a établi la dernière possibilité (où la solution est obtenue par la méthode des quadratures) pour qu'elle soit la conséquence de l'existence d'un nombre important de fonctions (à variables q et p) qui sont indépendantes et qui commutent entre elles au sens de poisson (Intégrabilité de Liouville) [4,5]. Toutefois, il est rare que ces solutions conviennent en pratique.

B. Projection O-P

Dans le but de construire des exemples non triviaux dont les solutions des équations de mouvement peuvent être obtenues directement, nous allons tenter de trouver des systèmes où la dynamique compliquée est juste le résultat de la projection (non linéaire) sur l'une des parties indépendantes subdivisant le grand système [1,2,3].

Pour illustrer cette possibilité, considérons la matrice hermitique X(t) d'ordre $N \times N$ et qui est définie par:

$$X(t) = U(t)Q(t)U^{-1}(t),$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) & & & & 0 \\ & q_2(t) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & q_N(t) \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

où U est une matrice unitaire quelconque; ce qui revient à diagonaliser X pour tout t. Dans ce cas, la méthode de projection de Olshanetsky et Perelomov [1] consiste à prescrire certaines dynamiques simples de X(t) que nous allons essayer de manipuler dans trois exemples.

C. Exemples

Exemple 1: Dans cet exemple, on prend:

$$\ddot{X}(t) = 0 \tag{1.2}$$

c'est à dire le mouvement de chaque particule est rectiligne uniforme. Et alors on a : $X(t) = at + b$; a et b sont déterminées par les conditions initiales. En effet, on a :
$X(0) = a(0) + b \Rightarrow b = X(0)$ et donc :

$$X(t) = \dot{X}(0)t + X(0) \tag{1.3}$$

Alors, nous allons analyser les variations de Q(t) dans le temps. Les $q_i(t)$, interprétés comme étant les positions de N particules en mouvement sur une ligne, sont évidemment les valeurs propres de $X(t) = \dot{X}(0)t + X(0)$.
D'autre part, (1.1) et (1.2) impliquent aussi la dynamique de Q.
Effectivement, on revient à l'expression déjà définie :

$$X(t) = U(t)Q(t)U^{-1}(t),$$

on la dérive par rapport au temps, on aura:

$$\dot{X} = ULU^{-1}$$

Avec L la matrice définie par

$$L \equiv [U^{-1}\dot{U}, Q] + \dot{Q} \tag{1.4}$$

On dérive (2.6) par rapport au temps et on obtient l'équation suivante:

$$dotX = U([M, L] + \dot{L})U^{-1}$$

où M est la matrice ayant l'expression:

$$M \equiv U^{-1}\dot{U}$$

Et puisque le système esr supposé isolé,
c'est à dire:

$$\ddot{X} = 0$$

on aura l'équation différentielle::

$$\dot{L} = [L, M] \tag{1.5}$$

Une telle équation est connue sous le nom de l'équation de Lax [4,11]. L et M forment la paire de Lax .
Propriétés:

$$L^+ = L,\ X^+ = X,\ M^+ = -M$$

$$C \equiv [X(t), \dot{X}(t)] = cte \qquad C^+ = -C \tag{1.6}$$

Remarquons au passage que C est une quantité conservée.
A l'aide de (1.4) et (1.5) et après séparation des parties diagonales et antidiagonales, on obtient:

$$\ddot{q}_i(t) = -\sum_{k \neq i} 2M_{ik}M_{ki}(q_i - q_k) \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} &\dot{M}_{ij}(q_i - q_j) + 2M_{ij}(\dot{q}_i - \dot{q}_j) \\ &= \sum_k M_{ik}M_{kj}(q_i + q_j - 2q_k) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Essayons de trouver M(t) en prenant des choix spéciaux de C.
Pour cela, commençons par supposer que X(0) est diagonale, c'est à dire:

$$U(0) = 1 \tag{1.9}$$

Ce qui implique que :

$$X(0) = Q(0) \qquad ; \qquad \dot{X}(0) = L(0)$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= [X(t), \dot{X}(t)]_{ij} = cte \\ &= [X(0), \dot{X}(0)]_{ij} = [Q(0), L(0)]_{ij} \\ &= \sum_k Q_{ik}(0)L_{kj}(0) - \sum_k L_{ik}(0)Q_{kj}(0) \\ &= Q_{ii}(0)L_{ij}(0) - L_{ij}(0)Q_{jj}(0) \\ &= q_i(0)L_{ij}(0) - L_{ij}(0)q_j(0) \\ &= (q_i(0) - q_j(0))L_{ij}(0) \end{aligned}$$

d'où:

$$L_{i \neq j}(0) = \frac{C_{ij}}{(q_i(0) - q_j(0))} \tag{1.10}$$

Remarquons que:

$$C_{ii}(t) = C_{ii}(0) = 0$$

Par ailleurs, on a pour tout t:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \sum_k M_{ik}Q_{kj} - \sum_k Q_{ik}M_{kj} + \dot{Q}_{ij} \\ &= M_{ij}(q_j - q_i) + \dot{Q}_{ij} \\ &= \delta_{ij}\dot{q}_j + M_{ij}(q_j - q_i) \end{aligned}$$

c'est à dire:

$$L_{ij}(t) = \delta_{ij}\dot{q}_j(t) - (q_i(t) - q_j(t))M_{ij}(t) \quad (1.11)$$

D'où:

$$L_{ii}(0) = \dot{q}_i(0)$$

$$L_{i\neq j}(0) = -(q_i(0) - q_j(0))M_{i\neq j}(0)$$

Et alors:

$$M_{i\neq j}(0) = \frac{-L_{i\neq j}(0)}{(q_i(0) - q_j(0))}$$

Et en tenant compte de (1.10) on aura:

$$M_{i\neq j}(0) = \frac{-C_{ij}}{(q_i(0) - q_j(0))^2} \quad (1.12)$$

on généralise la formule ci-dessus pour t quelconque en posant:

$$M_{i\neq j}(t) = \frac{-C_{ij}}{(q_i(t) - q_j(t))^2} \quad (1.13)$$

Donc (1.11) devient:

$$L_{ij}(t) = \delta_{ij}\dot{q}_j(t) + \frac{C_{ij}}{(q_i(t) - q_j(t))} \quad (1.14)$$

En portant (1.13) dans (1.7), on aura:

$$\ddot{q}_i(t) = -2\sum_{k\neq i} \frac{C_{ik}C_{ki}}{(q_i(t) - q_k(t))^3} \quad (1.15)$$

Ensuite, on identifie (1.15) avec $\ddot{q} = -\nabla V(q)$, ce qui nous conduit à une équation différentielle simple en V dont la solution est:

$$V(q) = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{C_{ij}C_{ji}}{(q_i - q_k)^2}$$

puis on porte l'expression de V(q) dans H pour obtenir enfin:

$$H = \frac{1}{2}(\sum_i p_i^2 - \sum_{i\neq j} \frac{C_{ij}C_{ji}}{(q_i - q_k)^2}) \quad (1.16)$$

Signalons que H est l'hamiltonien d'un système à N particules se mouvant sur une ligne et dont les équations de mouvement sont données par (1.15).

Revenons à l'équation (1.8):

$$\dot{M}_{ij}(q_i - q_j) + 2M_{ij}(\dot{q}_i - \dot{q}_j) = \sum_k M_{ik}M_{kj}(q_i + q_j - 2q_k)$$

on dérive (1.13) et on remplace dans (1.8); celle-ci devient:

$$0 = \frac{-C_{ij}}{(q_i - q_j)}(M_{jj} - M_{ii}) + \sum_k \frac{C_{ik}C_{kj}}{(q_i - q_k)^2(q_j - q_k)^2}(q_i + q_j - 2q_k) \quad (1.17)$$

où $i \neq j$ et $\sum_k$ désigne la somme sur tous les k telle que : $k \neq i$ et $k \neq j$

Posons:

$$C_{jk} \equiv ig(1 - \delta_{jk}) \quad (1.18)$$

où g est la constante de couplage.

On porte (1.18) dans (1.17), et après calcul, on trouve:

$$M_{jj} = ig\sum_{k\neq j} \frac{1}{(q_j - q_k)^2} \quad (1.19)$$

Le fait que (1.19) soit une solution de (1.17) signifie que le système classique de N particules ponctuelles qui est gouverné par l'hamiltonien: $H = \frac{1}{2}(\sum_{i=1} p_i^2 + g^2\sum_{i\neq j}\frac{1}{(q_i-q_j)^2})$ est complètement intégrable.

Exemple 2:

Considérons une autre équation d'évolution donnée par:

$$\ddot{X}(t) + w^2X(t) = 0 \quad (1.20)$$

C'est l'équation d'un oscillateur libre.

L'étude faite dans l'exemple 1 peut être manipulée dans ce cas, en effet;

Posons:

$$X = UQU^{-1},$$

$$M = U^{-1}\dot{U},$$

$$L = [M, Q] + \dot{Q}$$

On aura:

$$\ddot{X} = U([M, L] + \dot{L})U^{-1} = -w^2X = -w^2UQU^{-1} \quad (1.21)$$

C'est à dire que:

$$\ddot{Q} + [\dot{M, Q}] = \dot{L} = [L, M] - w^2Q = [\dot{Q}, M] + [[M, Q], M] - w^2Q \quad (1.22)$$

D'où:

$$[[M, Q], M] + [\dot{Q}, M] - w^2Q = \ddot{Q} + [\dot{M}, Q] + [M, \dot{Q}] \quad (1.23)$$

Si on choisit M comme une matrice dont les valeurs propres sont fonctions de $q_i(t)$ comme avant (voir (1.13)-(1.19)), on trouve que:

$$[\dot{M},Q]+2[M,\dot{Q}]=0$$

qu'on porte dans (1.23) et l'on déduit que:

$$\ddot{Q}=[[M,Q],M]-w^2Q \tag{1.24}$$

On voit bien que $[[M,Q],M]$ est purement diagonale. Cela veut dire que les valeurs propres $q_i(t)$ de $X(t)$ (données par(1.21)) se développent dans le temps juste comme des positions de N particules sur une ligne dont la dynamique est gouvernée par l'hamiltonien:

$$H=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}p_i^2 +g^2\sum_{i\neq j}\frac{1}{(q_i-q_j)^2}+w^2\sum_{i=1}q_i^2) \tag{1.25}$$

Exemple 3:

Concluons ce paragraphe par l'étude d'un autre type de projection (qui va mener aux potentiels couplés proportionnels à $\frac{1}{\sinh^2(ax)}$) [1] :
Considérons la matrice X hermitique, définie positive et de déterminant égal à un.
A cause de la positivité de ses valeurs propres, il est pratique d'écrire sa diagonalisation sous la forme:

$$X(t)=U(t)e^{2aQ(t)}U^{-1}(t) \tag{1.26}$$

avec:

$$Q(t)=diag(q_1(t),...,q_N(t)) \tag{1.27}$$

En dérivant (1.26) on trouve:

$$\dot{X}(t)=U(t)\ [\ [M,e^{2aQ(t)}] + 2a\ \dot{Q}(t)\ e^{2aQ(t)}\ ]U^{-1}(t) \tag{1.28}$$

avec:

$$M=U^{-1}\dot{U}$$

La contrainte est qu'on ne peut pas considérer $\ddot{X}=0$ dans ce cas, puisque le développement libre des éléments individuels (non couplés) de matrice, détruit la défini-positivité de X. Ce qui correspond au mouvement libre dans l'espace des matrices définies positives (à déterminant unité) est l'équation [1]:

$$\frac{d}{dt}(X^{-1}\dot{X}+\dot{X}X^{-1})=0 \tag{1.29}$$

Dont la solution est:

$$X(t)=Be^{2At}B^{+} \tag{1.30}$$

Avec:

$$B\in SL(N,C),$$
$$A^{+}=A,\qquad TrA=0$$

Notons que X est en effet définie positive.
Par analogie avec:$\dot{X}=ULU^{-1}$(dans le cas $\ddot{X}=0$), on définit L(t)par:

$$4aUL(t)U^{-1}=X^{-1}\dot{X}+\dot{X}X^{-1}\equiv J \tag{1.31}$$

En portant (1.26) et (1.28) dans (1.31) on aura:

$$L(t)=\dot{Q} +\frac{1}{4a}[e^{-2aQ}Me^{2aQ}-e^{2aQ}Me^{-2aQ}] \tag{1.32}$$

avec:

$$M=U^{-1}\dot{U}$$

En dérivant (1.31) et en tenant compte de (1.29), on obtient l'équation de Lax suivante:

$$\dot{L}=[L,M]$$

Les facteurs en a (et $\frac{1}{a}$) sont choisis de telle sorte que L(t) (équation (1.32)) se ramène à: $L(t)=\dot{Q}+[M,Q]$ (comme il a été défini dans (1.4)) quand $a\to 0$. Encore nous pouvons essayer d'utiliser les quantités conservées pour trouver L et M en termes de $q_i(t)$ et les conditions initiales .
Pour le cas spécial de $B=e^{aQ(0)}$ (X(0) diagonal, $U(0)=1$) on trouve [1] :

$$L_{ij}(t)=\delta_{ij}\dot{q}_i(t) +iag\coth[a(q_i(t)-q_j(t))](1-\delta_{ij}) \tag{1.33}$$

comme un choix consistent pour L, et les équations correspondantes à l'hamiltonien:

$$H=\frac{1}{2}TrL^2-\frac{1}{2}\frac{N(N-1)}{2}a^2g^2 =\frac{1}{2}[\sum_{i=1}p_i^2+\sum_{i\neq j}\frac{a^2}{\sinh^2(a(q_i-q_j))}] \tag{1.34}$$

vont être accomplies à l'aide des valeurs propres de la matrice:

$$X(t)=e^{aQ(0)}e^{2At}e^{aQ(0)} \tag{1.35}$$

où:

$$A_{jk}=a\delta_{jk}\dot{q}_j(0)+ia^2(1-\delta_{jk})\frac{1}{\sinh a(q_j-q_k)} \tag{1.36}$$

En conclusion, nous avons traité dans cette section trois exemples. Pour chacun d'eux, nous avons pu déterminer la paire de Lax (L,M) ainsi que la forme explicite de l'hamiltonien H. L'expression de L sera utilisée dans le paragraphe suivant pour trouver les quantités conservées.

II. INTÉGRABILITÉ DES SYSTÈMES DE CALOGERO

A. Définition et conséquences

1. Définition d'un système de Calogero

Le modèle de Calogero décrit un système de N particules ponctuelles identiques (de même masse) se déplaçant sur une ligne et dont l'énergie d'interaction est composée d'une partie coulombienne et une autre harmonique. Nous allons voir que le modèle est complètement intégrable dans les cas classique et quantique. Signalons que le modèle et ses différents descendants (connus sous le nom des systèmes de Calogero-Sutherland-Moser) [9] sont connectés avec un nombre de problèmes physiques tels que la gravité, la physique des trous noires, la physique de la matière condensée,.... La structure algébrique du modèle de Calogero [10], étudiée par le biais de la théorie des groupes, a été reconsidérée récemment par certains auteurs dans le cadre de l'algèbre des permutations. Cette approche d'opérateurs permet de donner une expression explicite des fonctions d'ondes.

2. Remarque

Dans ce section, nous allons nous intéresser aux systèmes de Calogero où l'énergie d'oscillation est négligée, ce qui se traduit par l'hamiltonien (explicité au premier paragraphe):

$$H = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + g^2 \sum_{i\neq j} \frac{1}{(q_i - q_j)^2})$$

3. Rappels (équation de Lax)

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que si on définit une matrice L d'ordre $N \times N$ comme suit:

$$\begin{aligned} L_{jj} &= p_j \\ L_{j\neq k} &= \frac{ig}{q_j - q_k} \end{aligned} \tag{2.1}$$

on peut écrire les équations de mouvements correspondantes à l'hamiltonien:

$$H = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + g^2 \sum_{i\neq j} \frac{1}{(q_i - q_j)^2}) \tag{2.2}$$

sous la forme de l'équation de Lax suivante:

$$\dot{L} = [L, M] \tag{2.3}$$

où M est donnée par:

$$\begin{aligned} M_{jj} &= ig \sum_{l\neq j} \frac{1}{(q_j - q_l)^2} \\ M_{j\neq k} &= \frac{-ig}{(q_j - q_k)^2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

B. Quantités conservées et leur utilité

1. Quantités conservées

L'observation cruciale, faite par P.Lax [11] (dans le contexte des équations différentielles partielles non linéaires, c'est à dire des opérateurs différentiels, plutôt que des matrices de dimension finie) est que toute équation de type (2.3), indépendante de la nature de la forme spécifique de L et M, implique l'existence d'une infinité de quantités conservées C_k ($\frac{dc_k}{dt} = 0$) définies par:

$$C_k \equiv TrL^k \qquad k = 1, 2, ... \tag{2.5}$$

L'existence de ces constantes de mouvements simplifie certainement la dynamique. De plus, si les C_k commutent au sens de poisson, on peut en principe les prendre comme des nouveaux moments:

$$P_k \equiv C_k \qquad k = 1, 2, ..., N \tag{2.6}$$

avec les nouvelles coordonnées Q_k choisies telle que la transformation qui donne les variables Q et P soit canonique; les équations de mouvements (écrites à l'aide des nouvelles variables) deviennent triviales:

$$\dot{P}_k = 0 \qquad , \qquad \dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} \tag{2.7}$$

Notons au passage que dans la plupart des cas (comme pour(2.2)), $C_2 = 2H$ (à des constantes numériques prés), ainsi la solution de (2.7) sera:

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{1}{2}t + d_2, \\ Q_{k\neq 2} &= d_k, (P_k = const\ pour\ tout\ k) \end{aligned} \tag{2.8}$$

avec les d_k des constantes numériques.
Ainsi,
le mouvement (ou l'évolution) est complètement exprimé en termes des variables (P_k, Q_k) appelées variables action-angle [12].

2. Critère d'intégrabilité

Théorème de Liouville [4,5]
Un système hamiltonien ayant un espace de phases de dimension 2N est intégrable par la méthode des quadratures si et seulement s'il admet exactement N fonctions quantités conservées C_i, i=1,2,...,N; indépendantes et en involution (c'est à dire: $\{C_i, C_j\} = 0$; $i, j = 1, 2, ...N$)
Remarque:
Le théorème de Liouville assure seulement l'existence de solutions. Leur construction exige sûrement diverses procédures ingénieuses.

C. Intégrabilité de l'équation de Lax

Ayant trouvé des systèmes dynamiques pour lesquels les équations de mouvement peuvent être écrites sous la forme de l'équation de Lax (équation (2.3)); On peut faire appel au théorème de Liouville pour étudier l'intégrabilité d'une telle équation.

1. Equation de Lax et modèle matriciel

Une possibilité (donnée dans [13], [14]) est de noter que (2.1) est de la forme:

$$L = \pi + igF \tag{2.9}$$

avec $\pi = diag(p_1, p_2, ..., p_N)$ est diagonale,
et F est purement antidiagonale(les termes diagonaux sont nuls), avec sa composante $F_{j\neq k}$ ne dépend que de $(q_j - q_k)$

$$F_{j\neq k} = f(q_j - q_k) \tag{2.10}$$

Dans (2.1), $F_{j\neq k}$ s'écrit:

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{2.11}$$

Laissons f non spécifiée, et posons:

$$M = ig(Z + Y) \tag{2.12}$$

avec Z diagonale et Y purement antidiagonale (et toutes les deux indépendantes du moment).
Après séparation des parties réelle et imaginaire dans l'équation de Lax (2.3), on trouve:

$$\dot{F} = [\pi, Y] \tag{2.13}$$

$$\dot{\pi} = -g^2[F, Z + Y]. \tag{2.14}$$

Quand (2.13) est satisfaite, on aura:

$$Y_{j\neq k} = f'(q_j - q_k) \tag{2.15}$$

(2.14) doit être séparée en partie diagonale et antidiagonale.
Pour la partie diagonale on a:

$$\dot{\pi}_{ii} = \dot{p}_i = -g^2[F, Y]_{ii} \tag{2.16}$$

(qui permet de déterminer le potentiel en termes de f); n'oublions pas que le membre de droite est égal à $-\frac{\partial V}{\partial q_i}$ car $\dot{p}_i = \ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$.
La partie antidiagonale satisfait:

$$\dot{\pi}_{i\neq j} = [F, Z + Y]_{i\neq j} = 0 \tag{2.17}$$

c'est à dire l'équation:

$$\begin{aligned}&\sum_{k\neq i\neq j} [f(q_i - q_k)f'(q_k - q_j) - f'(q_i - q_k)f(q_k - q_j)] \\ &+ f(q_i - q_j)(z_j - z_i) \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.18}$$

pour tout $i \neq j$.
On pose l'ansatz suivant:

$$z_i = \sum_{k\neq i} z(q_i - q_k) \tag{2.19}$$

Une solution de (2.18) est d'exiger à chaque terme dans la somme sur k d'être nul; posons pour de tel terme:

$$x = q_i - q_k, \qquad y = q_k - q_j$$

on montre que (2.18) sera satisfaite (pour tout $i \neq j$) si f et z vérifient l'équation fonctionnelle [15,16,17]:

$$f(x)f'(y) - f'(x)f(y) = (z(x) - z(-y))f(x + y) \tag{2.20}$$

On peut vérifier facilement que:$f(x) = \frac{1}{x}, z(x) = \frac{1}{x^2}$ satisfont (2.20).
L'équation (2.20) implique que:

$$z(x) = \frac{f''(x)}{2f(x)} \tag{2.21}$$

et les solutions de f(x) sont telle que $v(x) = -f(x)f(-x)$ avec le potentiel $v(x)$ prend l'une des quatres formes suivantes :

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{x^2} & (I) & \frac{a^2}{\sinh^2 ax} & (II) \\ \frac{a^2}{\sin^2 ax} & (III) & a^2\wp(ax) & (IV) \end{array} \tag{2.22}$$

où $\wp$ est la fonction elliptique de Weierstrass [18].
D'après (2.15) l'hamiltonien correspondant est:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{1}{2}g^2 \sum_{i \neq j} v(q_i - q_j) \quad (2.23)$$

Les potentiels I, II et III sont des cas spéciaux (des limites) de IV, mais il est pratique de les considérer séparément.

2. Etude de l'intégrabilité

A l'aide de (2.3), on sait que toutes les traces de polynômes en L commutent (au sens de poisson) avec H; mais vont-elles commuter entre elles?
Pour les systèmes I et II, la question apparaît triviale puisqu'à $t = \pm\infty$ les particules deviennent libres et $C_k = TrL^k$ s'approche de $\sum_{i=1}^{N} p_i^k$ pour les deux limites. Comme les C_k ne dépendent pas du temps, leur commutativité mutuelle et leur indépendance fonctionnelle aux temps particuliers $t = \pm\infty$ suffisent pour déterminer leurs propriétés à un temps quelconque.
Pour des systèmes à mouvements limités, la commutativité au sens de poisson des charges conservées est plus difficile à prouver.
Une possibilité est de montrer que toutes les valeurs propres de L commutent au sens de poisson (puisque $TrL^k = \sum_i \lambda_i^k$).
En général il est impossible d'obtenir des expressions explicites des valeurs propres de L à l'aide de fonctions en q et p; mais on peut utiliser des arguments indirects [19], comme nous allons le montrer dans le cas où L prend la forme:

$$L_{jj} = p_j$$
$$L_{j\neq k} = if(q_j - q_k) \quad (2.24)$$

(la constante de couplage est supposée égale à 1) et la fonction f satisfait l'équation fonctionnelle (2.20); ce qui nous ramène aux potentiels de types I-IV (expressions (2.22) et z donné par (2.21)).
L'idée consiste à considérer deux valeurs propres différentes de L, λ et μ, associées respectivement à deux fonctions propres normées Φ *et* Ψ ($\in C^N$)

$$(\pi + iF)\phi = \lambda\phi \qquad (\phi,\phi) = 1$$
$$(\pi + iF)\psi = \mu\psi \qquad (\psi,\psi) = 1 \quad (2.25)$$

puis à montrer que:

$$\{\lambda,\mu\} = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p_j}.\frac{\partial\mu}{\partial q_j} - \frac{\partial\lambda}{\partial q_j}.\frac{\partial\mu}{\partial p_j}\right) = 0 \quad (2.26)$$

Démonstration:
d'après (2.25), $\frac{\partial\lambda}{\partial q_j}$ et $\frac{\partial\lambda}{\partial p_j}$ (de même pour μ) peuvent être calculés en termes de f, f' et les composantes $\Phi_k, \Psi_k (k = 1,...,N)$ des deux vecteurs propres Φ et Ψ: $(\phi,\phi) = \sum_{k=1}^{N}\phi_k^*\phi_k = 1$ où ϕ_k^* désigne le conjugué de ϕ_k
Ce qui implique que:

$$\sum_{k=1}^{N}(\partial\phi_k^*)\phi_k + \phi_k^*(\partial\phi_k) = 0 \quad (2.27)$$

Ainsi (sans indiquer la sommation sur tout indice répété)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_k} = \phi_i^*\frac{\partial L_{ij}}{\partial p_k}\phi_j = \phi_k^*\phi_k$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial p_k} = \psi_k^*\psi_k$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial q_k} = i\phi_j^*\frac{\partial f(q_j - q_l)}{\partial q_k}\phi_l = i\sum_{l\neq k} f'(q_k - q_l)(\phi_k^*\phi_l - \phi_l^*\phi_k)$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial q_k} = i\sum_{l\neq k} f'(q_k - q_l)(\psi_k^*\psi_l - \psi_l^*\psi_k)$$

d'où:

$$\{\lambda,\mu\} = i\sum_{k\neq l} f'(q_k - q_l)\{\phi_k^*\psi_k^*R_{kl} - \Phi_k\psi_k R_{kl}^*\} \quad (2.28)$$

avec:

$$R_{kl} = \phi_k\psi_l - \phi_l\psi_k = -R_{lk}$$

Afin de réécrire (2.28) sous une forme où il serait possible d'exploiter l'équation fonctionnelle cruciale, (2.20), on note que (pour $\lambda \neq \mu$)

$$\psi_k\phi_k = \frac{i}{\lambda - \mu}\sum_l f(q_k - q_l)R_{lk} \quad (2.29)$$

En effet, d'après (2.25), on a:

$$\lambda\phi_k = p_k\phi_k + iF_{kl}\phi_l \quad ,$$
$$\mu\psi_k = p_k\psi_k + iF_{kl}\psi_l \quad (2.30)$$

ce qui implique que:

$$(\lambda - \mu)(\Phi_k\Psi_k) = i\sum_l(\Psi_k F_{kl}\Phi_l - \Phi_k F_{kl}\Psi_l) = -i\sum_l f(q_k - q_l)R_{kl} \quad (2.31)$$

Ceci nous permet d'écrire une expression du crochet de poisson $\{\lambda,\mu\}$ qui, après une série de manipulations plus ou moins longues mais simples, va être identiquement nul sans connaître explicitement les vecteurs propres, c'est à dire, on utilise uniquement l'équation fonctionnelle (2.20) et les propriétés de symétrie de f et z,

$$f(-x) = -f(x) \quad , \quad z(-x) = z(x) \quad (2.32)$$

Plus précisément, on insert (2.29) dans (2.28) et on obtient:

$$\{\lambda,\mu\} = \frac{1}{\lambda-\mu}\sum_{l\neq k\neq j\neq k} f'(q_k-q_l)\times \{f(q_k-q_j)R_{jk}R^*_{kl} + f(q_k-q_j)R^*_{jk}R_{kl}\} \quad (2.33)$$

Utilisons le fait que $f'(x) = f'(-x)$ et interchangeons j et l dans le second terme du deuxième membre, on aura:

$$\{\lambda,\mu\} = -\frac{1}{\lambda-\mu}\sum_{k\neq l\neq j\neq k} \times (f'\underbrace{(q_k-q_l)}_{y} f\underbrace{(q_j-q_k)}_{x} - f'(q_j-q_k)f(q_k-q_l))R_{jk}R^*_{kl} \quad (2.34)$$

Maintenant, on utilise (2.20) et on trouve:

$$\{\lambda,\mu\} = \frac{1}{\mu-\lambda}\sum_{k\neq l\neq j\neq k} (z(q_j-q_k) - z(q_l-q_k))f(q_j-q_l)R_{jk}R^*_{kl} \quad (2.35)$$

Afin d'aller plus loin, on note que:

$$\sum_l F_{jl}(\phi_l\psi_k - \phi_k\psi_l) = (F\phi)_j\psi_k - \phi_k(F\psi)_j = -i\{(\lambda\phi_j - p_j\phi_j)\psi_k - \phi_k(\mu\psi_j - p_j\psi_j)\} \quad (2.36)$$

ce qui implique que:

$$\sum_l f(q_j-q_l)R^*_{lk} = i\lambda\psi^*_k\phi^*_k - i\mu\phi^*_k\psi^*_j - ip_jR^*_{jk} \qquad (et\ c.c) \quad (2.37)$$

d'où:

$$\{\lambda,\mu\} = \frac{1}{\mu-\lambda}\{\sum_{j\neq k} z(q_j-q_k) \times R_{jk}[-i\lambda\psi^*_k\phi^*_j + i\mu\Phi^*_k\Psi^*_j + ip_jR^*_{jk}] + \sum_{l\neq k} z(q_l-q_k) \times R^*_{kl}[-i\lambda\psi_k\phi_l + i\mu\phi_k\psi_l + ip_lR_{lk}]\} \quad (2.38)$$

et en changeant l en j dans la seconde somme, on aura :

$$\{\lambda,\mu\} = -\frac{i\lambda}{\mu-\lambda}\sum_{j\neq k} z(q_j-q_k)\times [R_{jk}\psi^*_k\phi^*_j + R^*_{kj}\psi_k\phi_j] + \frac{i\mu}{\mu-\lambda}\sum_{j\neq k} z(q_j-q_k)[R_{jk}\phi^*_k\psi^*_j + R^*_{kj}\phi_k\psi_j] \quad (2.39)$$

dans (2.39) les deux quantités entre crochet sont antisymétriques en j et k, en effet:

$$\begin{aligned}[R_{jk}\phi^*_k\psi^*_j + R^*_{kj}\phi_k\psi_j] &= (\phi_j\psi_k - \phi_k\psi_j)\phi^*_k\psi^*_j \\ &\quad + (\phi^*_k\psi^*_j - \phi^*_j\psi^*_k)\phi_k\psi_j \quad (2.40)\\ &= \phi_j\psi_k\phi^*_k\psi^*_j - \phi^*_j\psi^*_k\phi_k\psi_j\end{aligned}$$

de même on a:

$$\begin{aligned}[R_{jk}\psi^*_k\phi^*_j + R^*_{kj}\psi_k\phi_j] &= (\phi_j\psi_k - \phi_k\psi_j)\psi^*_k\phi^*_j \\ &\quad + (\phi^*_k\psi^*_j - \phi^*_j\psi^*_k)\psi_k\phi_j \quad (2.41)\\ &= \phi^*_k\psi^*_j\psi_k\phi_j - \phi_k\psi_j\psi^*_k\phi^*_j\end{aligned}$$

et par conséquent:

$$\{\lambda,\mu\} = \frac{i(\mu-\lambda)}{(\mu-\lambda)}\sum_{j\neq k} z(q_j-q_k) \times[\phi^*_k\psi^*_j\psi_k\phi_j - \phi_k\psi_j\psi^*_k\phi^*_j]$$

et puisque $z(q_j-q_k)$ est symétrique, on aura:

$$\{\lambda,\mu\} = i\sum_{j\neq k} z(q_j-q_k)(\phi^*_j\psi^*_k\psi_j\phi_k) - i\sum_{j\neq k} z(q_j-q_k)(\phi_k\psi_j\psi^*_k\phi^*_j)$$

Donc:

$$\{\lambda,\mu\} = 0 \quad (2.42)$$

3. Conséquence et perspective

Le théorème de Liouville étant vérifié, ce qui justifie l'intégrabilité du système de Calogero. Il nous reste à déterminer le spectre d'un tel système.Ce sera l'objet de ce qui suit.

III. ETUDE QUANTIQUE DES SYSTÈMES DE CALOGERO

A. Position du problème

Nous considérons N particules de positions x_i $(1 \leq i \leq N)$ sur une ligne. L'hamiltonien du système est:

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2N}\sum_{i>j}(x_i - x_j)^2 + g\sum_{i>j}\frac{1}{(x_i - x_j)^2} \quad (3.1)$$

On se propose de trouver le spectre et les fonctions propres de H; c'est à dire résoudre l'équation de Schrödinger:

$$H\Psi = E\Psi$$

Comme les opérateurs P et H commutent (puisque P commute avec tout les potentiels V ne dépendant que des différences des coordonnées des particules), alors ils ont les mêmes fonctions propres (mais pas nécessairement les mêmes valeurs propres).
Pour simplifier les calculs, on se restreint aux fonctions propres Ψ associées à la valeur propre 0 de P (état fondamental); c'est à dire:

$$P\Psi = 0 \quad (3.2)$$

En plus, comme V et par conséquent H, présentent des singularités aux points $x_i = x_j$ avec $1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq N$, nous exigeons à Ψ de satisfaire:

$$\Psi(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_N) = 0 \qquad si \qquad x_i = x_j \quad (3.3)$$

pour pouvoir la prolonger puisque P n'a pas de singularité.
Nous allons nous limiter au domaine $D = \{x \in R^N, x_1 < x_2 < ... < x_N\}$ dans lequel Ψ doit être de carré sommable.
La formule (3.3) sera satisfaite si on choisit Ψ proportionnelle à:

$$z = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \quad (3.4)$$

Le potentiel contient le terme:

$$r^2 = \frac{1}{N}\sum_{i>j}(x_i - x_j)^2 \quad (3.5)$$

Donc $\Psi(x)$ est proportionnelle à un polynôme en r : $\Phi(r)$.
Les deux conditions ci-dessus nous ramènent à l'ansatz suivant [8] :

$$\Psi(x) = z^{\epsilon}\Phi(r)Q(x); \quad (3.6)$$

avec ϵ réel positif non nul.

B. Résolution de l'équation de Schrödinger

D'après ce qui précède, nous savons que :

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2N}\sum_{i>j}(x_i - x_j)^2 + g\sum_{i>j}\frac{1}{(x_i - x_j)^2}$$

$$\Psi(x) = z^{\epsilon}\Phi(r)Q(x)$$

1. Calculs utiles

Pour pouvoir résoudre une telle équation, on doit calculer : $\partial_i\Psi$ puis $\partial_i^2\Psi$
On a :

$$\partial_i\Psi = \epsilon z^{\epsilon-1}(\partial_i z)\Phi Q + z^{\epsilon}(\partial_i r)\Phi' Q + z^{\epsilon}\Phi(\partial_i Q)$$

$$\partial_i^2\Psi = \epsilon(\epsilon-1)z^{\epsilon-2}(\partial_i z)^2\Phi Q + \epsilon z^{\epsilon-1}(\partial_i^2 z)\Phi Q + 2\epsilon z^{\epsilon-1}Q(\partial_i z)(\partial_i r)\Phi' + z^{\epsilon}\Phi''(r)(\partial_i r)^2 Q + z^{\epsilon}\Phi'(\partial_i^2 r)Q + 2z^{\epsilon}\Phi'(\partial_i r)(\partial_i Q) + \Phi[(\partial_i^2 Q)z^{\epsilon} + 2\epsilon z^{\epsilon-1}(\partial_i z)(\partial_i Q)] \quad (3.7)$$

Evidemment, on a besoin de calculer les dérivées $\partial_i r, \partial_i z, \partial_i^2 r, \partial_i^2 z$ et les sommes de leurs produits.
- Calculs de $\sum_i(\partial_i r)^2$ et $\sum_i \partial_i^2 r$
Nous avons:

$$r^2 = \frac{1}{N}\sum_{i>j}(x_i - x_j)^2$$

donc:

$$r(\partial_i r) = x_i - X, \qquad X = \frac{1}{N}\sum_j x_j \quad (3.8)$$

Si nous appliquons une autre fois ∂_i on obtient:

$$\sum_i((\partial_i r)^2 + r(\partial_i^2 r)) = N - 1 \quad (3.9)$$

D'autre part on a:

$$\sum_i(\partial_i r)^2 = \frac{1}{r^2}\sum_i(x_i - X)^2 \quad (3.10)$$

Comme

$$\sum_i(x_i - X)^2 = \sum_i x_i^2 - NX^2;$$

et

$$r^2 = \frac{1}{2N}\sum_{i,j}(x_i - x_j)^2 = \sum_i x_i^2 - NX^2$$

on aura:

$$\sum_i (\partial_i r)^2 = 1 \tag{3.11}$$

ce qui implique (en utilisant (3.9)) que:

$$\sum_i (\partial_i^2 r) = \frac{1}{r}(N-2) \tag{3.12}$$

- Calculs de $\sum_i (\partial_i z)(\partial_i r)$

La dérivée logarithmique de $z = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$ nous donne:

$$\partial_i z = z \sum_{k \neq i} \frac{1}{x_i - x_k} \tag{3.13}$$

d'où:

$$\sum_i (\partial_i z)(\partial_i r) = \frac{z}{r} \sum_{i \neq k} \frac{x_i - X}{x_i - x_k} \tag{3.14}$$

et puisque:

$$\sum_{i \neq k} \frac{x_i - X}{x_i - x_k} = N(N-1) + \sum_{i \neq k} \frac{x_k - X}{x_i - x_k}$$

on obtient:

$$\sum_i (\partial_i z)(\partial_i r) = \frac{z}{r} \frac{N(N-1)}{2} \tag{3.15}$$

- Calculs de $\sum_i (\partial_i^2 z)$ et $\sum_i (\partial_i z)^2$

Posons:

$$z_{ik} \equiv \frac{1}{x_i - x_k} = -z_{ki}, \qquad Y \equiv \sum_{i \neq l \neq k \neq i} z_{ik} z_{il} \tag{3.16}$$

on a:

$$z_{ki} z_{il} + z_{il} z_{lk} + z_{lk} z_{ki} \equiv 0 \tag{3.17}$$

donc: $Y = -2Y$ (en échangeant les indices), d'où $Y = 0$
et par conséquent:

$$\begin{aligned}
\sum_i (\partial_i z)^2 &= z^2 \sum_i (\sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j}) \times (\sum_{i \neq k} \frac{1}{x_i - x_k}) \\
&= z^2 [\sum_{i \neq j \neq k \neq i} z_{ij} z_{ik} + \sum_{i \neq k} \frac{1}{(x_i - x_k)^2}] \\
&= z^2 \sum_{i \neq k} \frac{1}{(x_i - x_k)^2}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i (\partial_i^2 z) &= z \sum_i (\sum_{i \neq k} \frac{1}{x_i - x_k})^2 - z \sum_{i \neq k} \frac{1}{(x_i - x_k)^2} \\
&= z[\sum_i (\sum_{i \neq j} \sum_{i \neq k} \frac{1}{x_i - x_j} \frac{1}{x_i - x_k} - \sum_{k \neq i} \frac{1}{(x_i - x_k)^2})] \\
&= z \sum_{i \neq j \neq k \neq i} z_{ij} z_{ik} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

2. Résolution de l'équation $H\Psi = E\Psi$

On porte les résultats des calculs précédents dans $H\Psi = E\Psi$ et on trouve:

$$\begin{aligned}
E(\Phi z^\epsilon Q) = &-\frac{1}{2}[\epsilon(\epsilon-1) \sum_{i \neq k} \frac{1}{(x_i - x_k)^2} \Phi + 0 \\
&+ N(N-1)\epsilon \frac{\Phi'}{r} + \Phi'' + \frac{\Phi'}{r}(N-2)] z^\epsilon Q \\
&- \frac{1}{2}[2 \frac{\Phi'}{r} \sum_i (x_i - X)\partial_i Q] z^\epsilon - \frac{1}{2}(DQ) z^\epsilon \Phi \\
&+ (\frac{1}{2} r^2 + g \sum_{i>j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2}) \Phi z^\epsilon Q
\end{aligned} \tag{3.20}$$

où:

$$D = \sum_i \partial_i^2 + \epsilon \sum_{i \neq k} \frac{\partial_i - \partial_k}{x_i - x_k} \tag{3.21}$$

On suppose que:

$$DQ = 0 \tag{3.22}$$

$$\sum_i x_i \partial_i Q = kQ \tag{3.23}$$

donc l'équation (3.20) se réduit à l'équation suivante en Φ; en tenant compte du fait que $\sum_i \partial_i Q = 0$ qui découle de $P\Psi = 0$

$$-\frac{1}{2}\Phi'' - \frac{1}{2}\frac{\Phi'}{r}[N(N-1)\epsilon + (N-2) + 2k] + \frac{1}{2} r^2 \Phi = E\Phi \tag{3.24}$$

où l'on a supposé que:

$$\epsilon(\epsilon - 1) = g$$

c'est à dire:

$$\epsilon = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + g}$$

La résolution de (3.24) se fait en deux étapes:

1ère étape: On pose

$$\Phi(r) = e^{-\frac{r^2}{2}} P(r)$$

on a:

$$P'' + (\frac{\lambda}{r} - 2r)P' + (2E - \lambda - 1)P = 0 \tag{3.25}$$

où:

$$\lambda = \lambda(k) = N(N-1)\epsilon + (N-2) + 2k$$

2ème étape: On pose

$$P(r) = L(r^2) = L(u)$$

on a:

$$uL'' + L'(\frac{\lambda+1}{2} - u) + (\frac{E}{2} - \frac{\lambda+1}{4})L = 0 \tag{3.26}$$

On reconnaît une équation ayant pour solution le polynôme de Laguerre $L_n^{\frac{\lambda-1}{2}}(r^2)$[6,18] avec:

$$\frac{E}{2} - \frac{\lambda+1}{4} = n \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

c'est à dire:

$$E = E_n = 2n + k + \frac{N-1}{2}(N\epsilon + 1) \ (n = 0, 1, 2, ...). \tag{3.27}$$

Et par conséquent:

$$\Psi_{n,k}(x) = z^{\epsilon} e^{-\frac{r^2}{2}} L_n^{\frac{\lambda-1}{2}}(r^2) Q_k(x) \tag{3.28}$$

où:

$$L_n^{\frac{\lambda-1}{2}}(r^2) = \frac{1}{n!}(r^2)^{\frac{1-\lambda}{2}} e^{r^2} \frac{d^{(n)}((r^2)^{\frac{\lambda-1}{2}+n} e^{-r^2})}{d^n r^2}$$

Il nous reste donc à déterminer $Q_k(x)$.C'est le système (3.22) et (3.23) qui nous aidera à le faire. En effet, d'après (3.23), $Q_k(x)$ est un polynôme homogène de degré k.
Posons le changement de variables:

$$x_i' = x_i - X \qquad ; \qquad (X = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j) \tag{3.29}$$

$$\partial_i' = \partial_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \partial_j \tag{3.30}$$

qui satisfont les propriétés suivantes:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i' = 0; \qquad \sum_{i=1}^{N} \partial_i' = 0 \tag{3.31}$$

$$\partial_i' x_i' = \delta_{ij} - \frac{1}{N} \tag{3.32}$$

et alors l'équation (3.22) devient comme suit, en tenant compte de $P\Psi = 0$
($P\Psi = 0 \Rightarrow \sum_{i=1} \partial_i Q = \sum_{i=1} \partial_i' Q$) et du fait que $x_i' - x_j' = x_i - x_j$

$$(\sum_i (\partial_i')^2 + \epsilon \sum_{i \neq j} \frac{\partial_i' - \partial_j'}{x_i' - x_j'})Q(x') = 0 \tag{3.33}$$

Remarquons que l'équation (3.33) est complètement symétrique (ne change pas en permutant x_i et x_j).
Pour éliminer les contraintes sur Q_k et les coordonnées (x_i') on introduit les variables indépendantes:

$$s_p = \sum_{i=1}^{N} (x_i')^p; \qquad p = 2, 3, ..., N \tag{3.34}$$

pour $p = 0, 1, 2$ le calcul donne:

$$s_0 = N; \qquad s_1 = 0; \qquad s_2 = r^2$$

Signalons que s_p est un polynôme homogène de degré p en x_i'.
Puisque $s_0 = cte$ et $s_1 = 0$, Q_k dépend uniquement de s_p pour $p > 1$.
Ecrivons (3.33) à l'aide des variables s_p:

$$\begin{aligned} &\sum_{p,q=2}^{N} pq(s_{p+q-2} - \frac{1}{N}s_{p-1}s_{q-1})\frac{\partial^2 Q_k}{\partial s_p \partial s_q} \\ &+ \sum_{p=2}^{N} p(p-1)(1 - \frac{1}{N})s_{p-2}\frac{\partial Q_k}{\partial s_p} \\ &+ \frac{\epsilon}{2}\sum_{p=2}^{N}[s_0 s_{p-2} + s_2 s_{p-4} + ... + s_{p-4}s_2 + s_{p-2}s_0 \\ &-(p-1)s_{p-2}]p\frac{\partial Q_k}{\partial s_p} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

La résolution de cette équation a été faite pour $k = 3, 4, 5$ [20] (pas de solution pour $k = 2$)

$$Q_3 = s_3 = \sum_i (x'_i)^3$$

$$Q_4 = (N + 1 + N(N-1)\epsilon)s_4 \\ -(3(1-\frac{1}{N}) + (2N-3)\epsilon)s_2^2$$

$$Q_5 = (N + 5 + N(N-1)\epsilon)s_5 \\ -5(2(1-\frac{1}{N}) + (N-2)\epsilon)s_3 s_2$$

3. Etude de la dégénérescence

Remarquons que la fonction $Q_k(x')$ est complètement symétrique (par permutation des x'_i). Une telle symétrie nous permet de conclure que le nombre $g(N,k)$ de solutions indépendantes de l'équation (3.33) de degré k est égal au nombre de polynômes harmoniques complètement symétrique de degré k. En d'autres termes, il est égal au nombre de solutions entières non négatives de l'équation $k = 3n_3 + ... + Nn_N$. Par conséquent, nous obtenons l'expression suivante pour la fonction génératrice de $g(N,k)$ [21,22]:

$$G(N,t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(N,k)t^k \\ = \frac{1}{(1-t^3)(1-t^4)...(1-t^N)} \qquad (3.36)$$

Nous pouvons, alors, facilement montrer que la multiplicité de dégénérescence $f(N,m)$ associée à l'énergie:

$$E_m = m + E_0, \qquad E_0 = \frac{N-1}{2}(N\epsilon + 1) \quad (3.37)$$

est égale au nombre de solutions entières non négatives de l'équation:
$m = 2n_2 + 3n_3 + ... + Nn_N$.
La fonction génératrice $F(N,t)$ de $f(N,m)$ est [21,22]:

$$F(N,t) = \sum_{m=0}^{\infty} f(N,m)t^m \\ = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)...(1-t^N)} \qquad (3.38)$$

4. Commentaire

Malgré les changements de variables effectués pour simplifier l'équation de Schrödinger et aboutir à l'équation différentielle plus simple (3.35), il apparaît que celle-ci pose des problèmes pour $k \geq 6$. Cette difficulté sera surmontée grâce à la méthode algébrique.C'est l'objet du paragraphe suivant.

IV. APPROCHE ALGÉBRIQUE DES INTERACTIONS DE TYPE: $X^2 + \frac{\alpha}{X^2}$

Dans les sections précédentes, nous avons traité le système de N particules sur une ligne et nous avons su que l'hamiltonien s'écrit:

$$H_N = H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2N}\sum_{i>j}(x_i - x_j)^2 \\ +g\sum_{i>j}\frac{1}{(x_i - x_j)^2}$$

Un tel hamiltonien possède des fonctions propres et les valeurs propres associées que nous avons déterminées partiellement dans le cadre des approximations considérées. Dans le cas d'une seule particule, l'hamiltonien ci-dessus prend la forme suivante:

$$H = H_1 = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2 + \frac{2\alpha}{x^2}); \\ H\Psi = E\Psi \qquad (4.1)$$

avec:

$$\alpha \geq 0, \qquad 0 < x < \infty \\ \Psi(0) = 0$$

- Dans un premier temps, nous allons déterminer les fonctions et les valeurs propres de H par le biais de la méthode algébrique dans laquelle vont entrer en jeu les opérateurs de création et d'annihilation.
Notre étude se fera en deux étapes :
La première consiste à prendre $\alpha = 0$.
La deuxième (qui est un prolongement de la première) traite le cas: $\alpha \neq 0$
- Dans un deuxième temps, on étendra les résultats d'une particule au cas de N particules.

A. Cas d'une particule

1.Cas où: $\alpha = 0$
L'hamiltonien s'écrit:

$$H = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2)$$

Et en terme d'opérateurs de création a^+ et d'annihilation a, H devient:

$$H = a^+a + \frac{1}{2} \tag{4.2}$$

avec:

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\partial_x + x)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_x + x)$$

a. Propriétés des opérateurs a^+ et a

Les relations de commutations de H, a, a^+ s'écrivent:

$$\begin{aligned} &[H, a] = -a, \\ &[H, a^+] = a^+, [a, a^+] = 1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Démonstration:

$$[a, a^+] = aa^+ - a^+a$$

$$\begin{aligned} aa^+ &= \frac{1}{2}(\partial_x + x)(-\partial_x + x) \\ &= \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + \partial_x x - x\partial_x + x^2) \\ &= \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + 1 + x\partial_x - x\partial_x + x^2) \\ &= \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^+a &= \frac{1}{2}(-\partial_x + x)(\partial_x + x) \\ &= \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} [a, a^+] = &\frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2) \\ &+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c'est à dire:

$$[a, a^+] = 1$$

de même pour les deux autres.

b. Fonctions propres de H

La détermination de ces fonctions se fait en deux étapes :
Dans un premier temps, on ne tient pas compte des conditions aux limites.
Dans une seconde étape, on fait appel à ces limites.
i) Théorème 1

Si on ne tient pas compte des conditions aux limites au point 0, les fonctions propres ($H|\Phi_m\rangle = E_m|\Phi_m\rangle$) sont:

$$\begin{aligned} \Phi_m(x) &= \frac{(a^+)^m}{\sqrt{m!}}\Phi_0(x) \\ &= \gamma_m H_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = (-1)^m \Phi_m(-x) \end{aligned} \tag{4.4}$$

où $H_m(x)$ est le polynôme d'Hermite [6].
Démonstration
$\diamond$ La relation entre $\Phi_m(x)$ et $\Phi_0(x)$ sera déterminée par itération:

$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle &= c_1 a^+|\Phi_0\rangle, \\ \langle\Phi_1|\Phi_1\rangle &= 1, \\ \langle\Phi_0|\Phi_0\rangle &= 1 \end{aligned}$$

$$\langle\Phi_1|\Phi_1\rangle = |c_1|^2\langle\Phi_0|aa^+|\Phi_0\rangle$$

Or on a:

$$\begin{aligned} aa^+ &= [a, a^+] + a^+a \\ &= 1 + a^+a = 1 + N \end{aligned}$$

où N est l'opérateur nombre de particules: $N|\Phi_n\rangle = n|\Phi_n\rangle$, n est la valeur propre de N associée au vecteur propre $|\Phi_n\rangle$,
donc:

$$\langle\Phi_1|\Phi_1\rangle = |c_1|^2\langle\Phi_0|N + 1|\Phi_0\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle\Phi_1|\Phi_1\rangle &= |c_1|^2\langle\Phi_0|\Phi_0\rangle \\ &= |c_1|^2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \end{aligned}$$

d'où: $|\Phi_1\rangle = a^+|\Phi_0\rangle$
Par ailleurs:

$$|\Phi_2\rangle = c_2 a^+|\Phi_1\rangle,$$

et alors

$$\begin{aligned} \langle\Phi_2|\Phi_2\rangle &= |c_2|^2\langle\Phi_1|aa^+|\Phi_1\rangle \\ &= |c_2|^2\langle\Phi_1|N + 1|\Phi_1\rangle \\ &= |c_2|^2\langle\Phi_1|N|\Phi_1\rangle + |c_2|^2\langle\Phi_1|\Phi_1\rangle \\ &= 2|c_2|^2 = 1 \end{aligned}$$

donc: $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
ce qui nous permet d'écrire:

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}a^+|\Phi_1\rangle$$

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+)^2|\Phi_0\rangle$$

De même pour $|\Phi_n\rangle$:

$$|\Phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^+ |\Phi_{n-1}\rangle$$
$$|\Phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} (a^+)^2 |\Phi_{n-2}\rangle$$
$$\vdots$$
$$|\Phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |\Phi_0\rangle$$

Donc:

$$\Phi_m(x) = \frac{(a^+)^m}{\sqrt{m!}} \Phi_0(x)$$

⋄ Il nous reste à déterminer $\Phi_0(x)$

On a: $a|\Phi_0\rangle = 0$ d'où: $\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_x + x)|\Phi_0\rangle = 0$ $\Rightarrow (\partial_x + x)|\Phi_0\rangle = 0$
donc:

$$\Phi_0'(x) + x\Phi_0(x) = 0$$

$$\frac{\Phi_0'(x)}{\Phi_0(x)} = -x \Rightarrow \int \frac{\Phi_0'(x)}{\Phi_0(x)} = \int -x$$

$$\log \Phi_0(x) = \frac{-x^2}{2} + cte$$

$$\Phi_0(x) = c\ e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$\int_0^{+\infty} |\Phi_0(x)|^2 dx = 1$$
$$\int_0^{+\infty} |c|^2 e^{-x^2} dx = 1$$

Or: $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ l'intégrale gaussienne
donc:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

d'où: $|c|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \Rightarrow |c|^2 = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}} \Rightarrow c = \sqrt{2}(\frac{1}{\pi})^{\frac{1}{4}}$
et alors:

$$\Phi_0(x) = \sqrt{2}(\frac{1}{\pi})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Enfin, on a:

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{m!}} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} (-\frac{d}{dx} + x)^m \sqrt{2}(\frac{1}{\pi})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

ou encore:

$$\Phi_m(x) = \gamma_m H_m(x) e^{\frac{-x^2}{2}}$$

avec:

$$H_m(x) = (x - \frac{d}{dx})^m,$$
$$\gamma_m = (\frac{1}{\pi})^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{m!}} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}}$$

⋄ $H_m(-x) = (-x + \frac{d}{dx})^m = (-1)^m (x - \frac{d}{dx})^m$
donc:

$$\Phi_m(-x) = \gamma_m H_m(-x) e^{\frac{-x^2}{2}}$$
$$= \gamma_m (-1)^m (x - \frac{d}{dx})^m e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$(-1)^m \Phi_m(-x) = \gamma_m (x - \frac{d}{dx})^m e^{\frac{-x^2}{2}}$$
$$= \Phi_m(x)$$

d'où:

$$\Phi_m(x) = (-1)^m \Phi_m(-x)$$

ii) Théorème 2
A cause des conditions au bords ($\Phi(0) = 0$), seulement les m impairs sont permis.
Démonstration
Voyons ceci pour les premiers vecteurs.
On a:

$$\Phi_0(x) = \sqrt{2}(\frac{1}{\pi})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$\Phi_1(x) = 2\gamma_1 x e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$\Phi_2(x) = \gamma_2 H_2(x) e^{\frac{-x^2}{2}}$$
$$= \gamma_2 (4x^2 - 2) e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$\Phi_3(x) = \gamma_3 (8x^2 - 12) x e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$\Phi_4(x) = \gamma_4 H_4(x) e \frac{-x^2}{2}$$
$$= \gamma_4 (16x^4 - 48x^2 + 12) e^{\frac{-x^2}{2}}$$

On remarque que les $\Phi_{pairs}(0) \neq 0$, par contre $\Phi_{impairs}(0) = 0$.
Conséquence
Le théorème 2 nous permet de poser le changement

$$\Psi_n = \Phi_{2n+1} \qquad (4.5)$$

et alors les opérateurs de création A^+et d'annihilation A qui connectent les états propres Ψ_n sont :$A^+ = (a^+)^2 et\ A = a^2$.

iii) Propriétés de A^+ et A :

A^+ et A satisfont les relations de commutations suivantes:

$$\begin{aligned} [H, A] &= -2A, \\ [H, A^+] &= 2A^+, \\ [A, A^+] &= 4H \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} [H, A] &= [H, a^2] \\ &= a[H, a] + [H, a]a \\ &= a(-a) + (-a)a \\ &= -2a^2 = -2A \end{aligned}$$

de même pour les deux autres.

On reconnaît les relations de commutations de sl(2,R)= so(2,1).

c. Détermination du casimir

i) Notations

On pose la normalisation

$$A_3 = \frac{1}{2}H \quad , \quad A_- = \frac{1}{2}A \quad , \quad A_+ = \frac{1}{2}A^+$$

on aura:

$$\begin{aligned} [A_3, A_\pm] &= \pm A_\pm, \\ [A_+, A_-] &= -2A_3 \end{aligned} \qquad (4.7)$$

ii) Casimir

Considérons l'opérateur $C_2 = A_+A_- - A_3^2 + A_3$ [23].

On a:

$$C_2 = \frac{1}{2}A^+\frac{1}{2}A - (\frac{1}{2}H)^2 + \frac{1}{2}H$$

$$C_2 = \frac{1}{4}A^+A - \frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}H$$

$$C_2 = \frac{1}{4}(A^+A - H^2 + 2H).$$

On vérifie facilement que C_2 commute avec A, A^+, H ce qui lui donne la propriété d'un casimir. En effet on a:

$$\begin{aligned} [C_2, H] &= [\frac{1}{4}(A^+A - H^2 + 2H), H] \\ &= [\frac{1}{4}(A^+A), H] \\ &= \frac{1}{4}A^+[A, H] + \frac{1}{4}[A^+, H]A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [C_2, H] &= \frac{1}{4}A^+(2A) + \frac{1}{4}(-2A^+)A \\ &= \frac{1}{4}(2A^+A - 2A^+A) = 0 \end{aligned}$$

De même pour $[C_2, A] = 0\ et\ [C_2, A^+] = 0$

Dans la représentation utilisée dans (4.6), la valeur du casimir est:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{4}(A^+A - H^2 + 2H) \\ &= \frac{1}{4}[(a^+)^2a^2 - (a^+a + \frac{1}{2})^2 + 2(a^+a + \frac{1}{2})] \\ &= \frac{1}{4}[(a^+)^2a^2 - (a^+a + \frac{1}{2})(a^+a + \frac{1}{2}) + 2a^+a + 1] \\ &= \frac{1}{4}[(a^+)^2a^2 - a^+aa^+a - \frac{1}{2}a^+a - \frac{1}{2}a^+a - \frac{1}{4} + 2a^+a + 1] \\ &= \frac{1}{4}[(a^+)^2a^2 - a^+(a^+a + 1)a - a^+a + 2a^+a - \frac{1}{4} + 1] \\ &= \frac{1}{4}[(a^+)^2a^2 - (a^+)^2a^2 - a^+a - a^+a + 2a^+a - \frac{1}{4} + 1] \\ &= \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}(\frac{3}{4}) = \frac{3}{16}1 \end{aligned} \qquad (4.8)$$

iii) Conséquence:

D'après le lemme de Schur, la représentation (4.6)est irréductible [23].

d. Valeurs propres de H

On a: $[A, A^+] = 4H$ c'est à dire

$$H = \frac{1}{4}(AA^+ - A^+A)$$

Or: $A = a^2\ et\ A^+ = (a^+)^2$

donc: $H = \frac{1}{4}(a^2(a^+)^2 - (a^+)^2a^2)$

d'où:

$$H|\Phi_n\rangle = E_n|\Phi_n\rangle$$

$$\frac{1}{4}(a^2(a^+)^2 - (a^+)^2a^2)|\Phi_n\rangle = E_n|\Phi_n\rangle$$

On sait que:

$$a^+|\Phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\Phi_{n+1}\rangle$$

$$a|\Phi_n\rangle = \sqrt{n}|\Phi_{n-1}\rangle$$

donc:

$$(a^+)^2|\Phi_n\rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}|\Phi_{n+2}\rangle$$

et alors:

$$a^2(a^+)^2|\Phi_n\rangle = (n+1)(n+2)|\Phi_n\rangle$$

de même:

$$(a^+)^2a^2|\Phi_n\rangle = n(n-1)|\Phi_n\rangle$$

d'où:

$$\frac{1}{4}(a^2(a^+)^2-(a^+)^2a^2)|\Phi_n\rangle = \frac{1}{4}[(n+1)(n+2)-n(n-1)]|\Phi_n\rangle$$
$$= E_n|\Phi_n\rangle$$

Ainsi:

$$(n+\frac{1}{2})|\Phi_n\rangle = E_n|\Phi_n\rangle$$

on obtient donc: $E_n = n+\frac{1}{2}$ avec n impair $(n=2p+1)$
c'est à dire:

$$E_p = 2p+\frac{3}{2} \qquad p=0,1,.... \tag{4.9}$$

Remarque:
Explicitement la matrice de H s'écrit:

$$H = 2A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & & & & & 0 \\ & \frac{7}{2} & & & & \\ & & \frac{11}{2} & & & \\ & & & . & & \\ & & & & . & \\ 0 & & & & & . \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

2. Cas où$\alpha \neq 0$ On se propose de maintenir la situation précédente ($\alpha = 0$) pour $\alpha \neq 0$, c'est à dire, au lieu de A et A^+, on va considérer les opérateurs B et B^+ satisfaisant les mêmes relations de commutation:

$$\begin{aligned} [H,B] &= -2B; \\ [H,B^+] &= 2B^+; \\ [B,B^+] &= 4H \end{aligned} \tag{4.11}$$

avec:

$$B = a^2+\alpha f(x) \tag{4.12}$$

(En d'autres termes, on a prolongé l'opérateur A) où f est une fonction qu'on se propose de déterminer.

a. Rappel

On sait que :

$$H = (a^+a+\frac{1}{2})+\alpha V(x) = H_0+\alpha V$$

Donc:

$$\begin{aligned} [H,B] &= [H_0+\alpha V, B] \\ &= [H_0+\alpha V, a^2+\alpha f(x)] \\ &= [H_0,a^2]+\alpha([V,a^2]+[H_0,f(x)]) \\ &= -2a^2+\alpha([V,\frac{1}{2}(\partial_x+x)(\partial_x+x)] \\ &\quad +[\frac{1}{2}(-\partial_x+x)(\partial_x+x),f]) \\ &= -2a^2+\alpha([V,\frac{1}{2}(\partial_x^2+\partial_x x+x\partial_x+x^2)] \\ &\quad +[\frac{1}{2}(-\partial_x^2-\partial_x x+x\partial_x+x^2),f] \\ &= -2a^2+\alpha([V,\frac{1}{2}(\partial_x^2+1+2x\partial_x+x^2)] \\ &\quad +[\frac{1}{2}(-\partial_x^2+x^2-1),f]) \end{aligned}$$

d'où:

$$[H,B] = -2a^2+\alpha(\frac{1}{2}[V,\partial_x^2+2x\partial_x]-\frac{1}{2}[\partial_x^2,f]) \tag{4.13}$$

Or:

$$[H,B] = -2B$$

c'est à dire:

$$\begin{aligned} &-2a^2+\alpha(\frac{1}{2}[V,\partial_x^2+2x\partial_x]-\frac{1}{2}[\partial_x^2,f]) \\ &= -2(a^2+\alpha f(x)) \end{aligned}$$

D'où:

$$\frac{1}{2}[V,\partial_x^2]+\frac{1}{2}[f,\partial_x^2] = [x\partial_x,V]-2f(x)$$

Une solution est donnée par le système:

$$f(x) = -V(x)$$

$$[V,x\partial_x] = -2f$$

et alors:

$$f(x) = -V(x)$$

$$V(x) = \frac{1}{x^2}$$

(résultat qui concorde avec (4.1))

b. Etat fondamental et énergie associée

Pour obtenir l'état fondamental Ψ_0 de H, on doit résoudre l'équation:

$$B\Psi_0 = 0 \tag{4.14}$$

Si on pose l'ansatz suivant:

$$\Psi_0(x) = x^\epsilon e^{\frac{-x^2}{2}}$$

qui n'est autre qu'une extension de $\Psi_0 = \Phi_1$ dans le cas où $\alpha = 0$ (voir (4.5))

Ce qui détermine la constante ϵ en fonction de α.
On a:

$$B\Psi_0 = 0$$

c'est à dire:

$$(\frac{1}{2}(\partial_x + x)(\partial_x + x) - \frac{\alpha}{x^2})\Psi_0 = 0$$

ou encore:

$$(\frac{1}{2}(\partial_x^2 + x^2 + 2x\partial_x + 1) - \frac{\alpha}{x^2})x^\epsilon e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

on dérive et on remplace, ce qui nous ramène à l'égalité simplifiée:

$$\frac{1}{2}\epsilon(\epsilon - 1) - \alpha = 0,$$

c'est une équation du second ordre en ϵ dont les solutions sont:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2\alpha},$$
$$\epsilon_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2\alpha}$$

Remarquons que $\epsilon_1 \geq 1$ et $\epsilon_2 \leq 0$ (car $\alpha \geq 0$)
Pour $\epsilon = \epsilon_2$ la fonction Ψ_0 n'est pas définie en 0, ce qui n'est pas en accord avec les conditions aux limites ($\Psi_0 = 0$), donc reste une seule racine convenable qui est:

$$\epsilon = \epsilon_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2\alpha} \tag{4.15}$$

ce qui détermine explicitement l'état fondamental $\Psi_0(x)$.
Maintenant passons au calcul de l'énergie E_0:
on a: $H\Psi_0 = E_0\Psi_0$
Par ailleurs:

$$H = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2) + \alpha V$$

$$B = \frac{1}{2}(\partial_x^2 + x^2 + 2x\partial_x + 1) - \alpha V$$

D'où:

$$(-B + x^2 + x\partial_x + \frac{1}{2})\Psi_0 = E_0\Psi_0$$

et puisque $B\Psi_0 = 0$ *et* $\Psi_0(x) = x^\epsilon e^{-\frac{x^2}{2}}$ on aura:

$$E_0 = \epsilon + \frac{1}{2} \tag{4.16}$$

c. Détermination des états Ψ_n et les énergies associées E_n

Pour déterminer E_n, on utilise l'équation de Schrödinger $H\Psi_n = E_n\Psi_n$.
B^+ est l'opérateur de création; donc $B^+\Psi_{n-1} \sim \Psi_n$
d'où:

$$HB^+\Psi_{n-1} = E_nB^+\Psi_{n-1}$$

or:

$$[H, B^+] = 2B^+$$

et alors:

$$(2B^+ + B^+H)\Psi_{n-1} = E_nB^+\Psi_{n-1}$$

c'est à dire:

$$(2 + E_{n-1})B^+\Psi_{n-1} = E_nB^+\Psi_{n-1}$$

Donc:

$$E_n = E_{n-1} + 2$$

On a ainsi une relation de récurrence entre E_n et E_{n-1}; une telle relation nous permet de déterminer E_n en fonction de E_0 (déjà calculée)

$$\begin{aligned} E_n &= E_{n-1} + 2 \\ &= E_{n-2} + 4 \\ &\;. \\ &\;. \\ &= E_0 + 2n \\ &= \epsilon + \frac{1}{2} + 2n \end{aligned}$$

$$E_n = 2n + \epsilon + \frac{1}{2}; \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.17}$$

Avant de passer au calcul de l'état Ψ_n, on commence par déterminer l'action de B^+ et B sur cet état, pour cela, nous aurons besoin du casimir C_2.

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{4}(B^+B - H^2 + 2H) \\ &= \frac{1}{4}\{((a^+)^2 - \frac{\alpha}{x^2})(a^2 - \frac{\alpha}{x^2}) \\ &\quad -(a^+a + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{x^2})^2 + 2(a^+a + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{x^2})\} \qquad (4.18) \\ &= (\frac{3}{16} - \frac{1}{4}\epsilon(\epsilon - 1))1 \end{aligned}$$

par ailleurs on a:

$$|\Psi_{n+1}\rangle = cB^+|\Psi_n\rangle$$

d'où:

$$\langle\Psi_{n+1}| = c^*\langle\Psi_n|B$$

et alors:

$$\langle\Psi_{n+1}|\Psi_{n+1}\rangle = 1 = |c|^2\langle\Psi_n|BB^+|\Psi_n\rangle$$

$$1 = \langle\Psi_{n+1}|\Psi_{n+1}\rangle = |c|^2\langle\Psi_n|4H + B^+B|\Psi_n\rangle$$

$$\frac{1}{|c|^2} = 4E_n\langle\Psi_n|\Psi_n\rangle + \langle\Psi_n|4C_2 + H^2 - 2H|\Psi_n\rangle$$

Donc:

$$\frac{1}{|c|^2} = 4E_n + 4(\frac{3}{16} - \frac{1}{4}\epsilon(\epsilon-1)) + E_n^2 - 2E_n$$

$$\frac{1}{|c|^2} = (2n+\epsilon+\frac{1}{2})^2 + 2(2n+\epsilon+\frac{1}{2}) + \frac{3}{4} - \epsilon(\epsilon-1)$$

$$\frac{1}{|c|^2} = 4(n^2 + n\epsilon + \epsilon + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2})$$

et par conséquent:

$$\frac{1}{|c|} = \pm 2(n^2 + n\epsilon + \epsilon + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$$

Enfin on a:

$$\begin{aligned} B^+|\Psi_n\rangle &= \frac{1}{c}|\Psi_{n+1}\rangle \\ &= -2(n^2 + n\epsilon + \epsilon + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}|\Psi_{n+1}\rangle \\ &= (-1)2\sqrt{(n+1)(n+\epsilon+\frac{1}{2})}|\Psi_{n+1}\rangle \quad (4.19) \end{aligned}$$

De même pour

$$B|\Psi_n\rangle = (-1)2(n(n+\epsilon-\frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}}|\Psi_{n-1}\rangle. \quad (4.20)$$

Ce qui se résume par les formules suivantes:

$$B^+|\Psi_n\rangle = (-1)2\sqrt{(n+1)(n+\epsilon+\frac{1}{2})}|\Psi_{n+1}\rangle$$

$$B|\Psi_n\rangle = (-1)2\sqrt{(n)(n+\epsilon-\frac{1}{2})}|\Psi_{n-1}\rangle.$$

Finalement, la première relation de récurrence ci-dessus nous permet d'écrire:

$$|\Psi_n\rangle = \frac{(-1)^n\frac{1}{2^n}}{\sqrt{n!(n-1+\epsilon+\frac{1}{2})(n-2+\epsilon+\frac{1}{2})...(n-n+\epsilon+\frac{1}{2})}} \times (B^+)^n|\Psi_0\rangle$$

En utilisant la définition et les propriétés de la fonction Γ [6], on trouve que:

$$\frac{\Gamma(\epsilon+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\epsilon+\frac{1}{2})} = \frac{1}{(n-1+\epsilon+\frac{1}{2})(n-2+\epsilon+\frac{1}{2})} \times \frac{1}{(n-3+\epsilon+\frac{1}{2})...(n-n+\epsilon+\frac{1}{2})}$$

qu'on porte dans la dernière expression de Ψ_n pour obtenir l'écriture simplifiée suivante:

$$|\Psi_n\rangle = (-1)^n\frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{\Gamma(\epsilon+\frac{1}{2})}{n!\Gamma(n+\epsilon+\frac{1}{2})}}(B^+)^n|\Psi_0\rangle \quad (4.21)$$

Si on écrit:

$$\Psi_n(x) = \gamma_n x^\epsilon e^{\frac{-x^2}{2}}P_n(x^2)$$

et on la porte dans l'équation $H\Psi_n = E_n\Psi_n$ (en tenant compte du changement de variables $x^2 = u$)on obtient l'équation différentielle connue suivante:

$$[u\partial_u^2 + (\epsilon+\frac{1}{2})\partial_u - u\partial_u + n]P_n(u) = 0 \quad (4.22)$$

dont la solution est le polynôme de Laguerre de degré n en u: $L_n^{\epsilon-\frac{1}{2}}(u)$ [6,18]

$$L_n^{\epsilon-\frac{1}{2}}(u) = \frac{1}{n!}u^{\frac{1}{2}-\epsilon}e^u\frac{d^{(n)}(u^{\epsilon-\frac{1}{2}+n}e^{-u})}{d^nu}$$

B. Cas de N particules

1. *Rappels*

Nous savons que l'hamiltonien d'un système unidimensionnel constitué de N particules s'écrit:

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2N}\sum_{i>j}(x_i-x_j)^2 + g\sum_{i>j}\frac{1}{(x_i-x_j)^2}$$

Nous avons déjà procédé à un changement de variables $x \to x'$ et nous avons obtenu les résultats suivants:

$$x_i' = x_i - X \qquad (X = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j)$$

$$\partial'_i = \partial_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\partial_j$$

$$\sum_{i=1}^{N} x'_i = 0 \qquad , \qquad \sum_{i=1}^{N}\partial'_i = 0$$

$$\partial'_i x'_j = \delta_{ij} - \frac{1}{N}$$

Avec les changements cités ci-dessus l'hamiltonien s'écrit:

$$H = -\frac{1}{2}\sum_i(\partial'_i)^2 + \frac{1}{2}\sum_i(x'_i)^2 + g\sum_{i>j}\frac{1}{(x'_i - x'_j)^2} \tag{4.23}$$

2. Définition et propriétés des opérateurs b_i et b_i^+

a. Définitions

$$b_i \equiv \partial'_i + x'_i$$
$$b_i^+ \equiv -\partial'_i + x'_i, (i = 1, 2, ..., N) \tag{4.24}$$

b. Propriétés

$$[b_i, b_j^+] = 2(\delta_{ij} - \frac{1}{N})$$

$$[b_i, b_j] = 0 = [b_i^+, b_j^+] \tag{4.25}$$

$$\sum_{i=1}^{N} b_i = 0 = \sum_{i=1}^{N} b_i^+$$

c. Ecriture de H en fonction de b_i et b_i^+

En portant (4.24) dans (4.23), on trouve:

$$H = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N} b_i^+ b_i + (N-1)) + g\sum_{i>j}\frac{1}{(x'_i - x'_j)^2} \tag{4.26}$$

C'est l'hamiltonien de N oscillateurs harmoniques sur une ligne et qui sont en interaction.

3. Opérateurs de création et d'annihilation

a. Définitions

Par analogie avec le cas d'une particule, on peut définir les opérateurs:

$$B_2 = \frac{1}{2}\sum_i b_i^2 - gV,$$
$$B_2^+ = \frac{1}{2}\sum_i (b_i^+)^2 - gV \tag{4.27}$$

b. Propriétés

$$[H, B_2] = -2B_2,$$
$$[H, B_2^+] = 2B_2^+, \tag{4.28}$$
$$[B_2, B_2^+] = 4H$$

c. Conjecture

Nous supposons qu'il existe des opérateurs $B_2, B_3, ..., B_N$ vérifiant:
$[H, B_p] = -pB_p$ et permettant d'écrire un état Ψ_n (associé à l'énergie E_n) à l'aide de l'état fondamental Ψ_0 par le biais de la relation:

$$\Psi_n = (B_2^+)^{n_2}(B_3^+)^{n_3}....(B_N^+)^{n_N}\Psi_0 \tag{4.29}$$

Et alors:

$$E_n = \sum_{p=2}^{N} pn_p + E_0 \tag{4.30}$$

d. Remarque

Signalons qu'on a le même spectre et dégénérescence trouvés précédemment dans le chapitre 3 (formules (3.37) et (3.38))

4. Détermination de B_p pour $p > 2$ [20]

a. cas où g=0

Dans ce cas, il existe des opérateurs:

$$B_p \equiv A_p = \sum_{i=1}^{N} b_i^p, \qquad (p = 2, ..., N) \tag{4.31}$$

vérifiant:

$$[H_0, A_p] = -pA_p \tag{4.32}$$

Et par conséquent l'ensemble des fonctions d'ondes complètement antisymétrique est donné par:

$$\Phi_n = (A_2^+)^{n_2}(A_3^+)^{n_3}...(A_N^+)^{n_N}\Phi_0 \tag{4.33}$$

avec les énergies correspondantes:

$$E_n = E_0 + 2n_2 + 3n_3 + ... + Nn_N \tag{4.34}$$

et où:

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{1!2!...N!}} \frac{1}{2^{\frac{N(N-1)}{4}}} \prod_{i>j} (b_i^+ - b_j^+)|0\rangle \quad (4.35)$$

$$b_i|0\rangle = 0 \qquad \forall i$$

est l'état d'énergie fondamentale.

b. Cas où $g \neq 0$

On pose l'ansatz suivant:

$$B_p = A_p + g(F_{ij}^{(p)} b_i b_j + F_i^{(p)} b_i + F^{(p)}) \quad (4.36)$$

où: $F_{ij}^{(p)}, F_i^{(p)} et\ F^{(p)}$ sont des fonctions en $(x_i')_{1\leq i \leq N}$ qui peuvent être déterminées par le biais des commutateurs:

$$[H, B_p] = -pB_p, \qquad [H, B_p^+] = pB_p^+$$

Exemples:[20]

Pour $p = 3$

$$B_3 = A_3 + g(F_{ij}^{(3)} b_i b_j + F_i^{(3)} b_i + F^{(3)})$$

avec:

$$F_{ij}^{(3)} = 0$$

$$F_i^{(3)} = -3g \sum_j \frac{1}{(x_i' - x_j')^2}$$

$$F^{(3)} = 0$$

Pour $p = 4$

$$B_4 = A_4 + g(F_{ij}^{(4)} b_i b_j + F_i^{(4)} b_i + F^{(4)})$$

avec:

$$F_{ij}^{(4)} = -2g \frac{1}{(x_i' - x_j')^2} \qquad si \qquad i \neq j$$

$$F_{ii}^{(4)} = -4g \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i' - x_j')^2}$$

$$F_i^{(4)} = 4g \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i' - x_j')^3}$$

$$F^{(4)} = -6g \sum_{i,j} \frac{1}{(x_i' - x_j')^4} + g^2 [2 \sum_{i,j,k} \frac{1}{(x_i' - x_j')^2} \frac{1}{(x_i' - x_k')^2} - \sum_{i,j} \frac{1}{(x_i' - x_j')^4}]$$

V. CONCLUSION

Dans ce travail nous avons étudié l'intégrabilité des systèmes de Calogero classiques et quantiques. Cette étude faisant appel à des méthodes algébriques et géométriques, se consacre aussi à l'utilisation des techniques de déformations ayant toutes pour but la détermination des solutions aux équations d'évolution des systèmes hamiltoniens considérés.

Comme perspectives, nous projetons entre autres: (i) Généraliser des résultats connus pour les systèmes de Calogero classiques et quantiques aux modèles supersymétriques [24]. (ii) Elaborer le lien entre les systèmes de Calogero avec l'effet Hall quantique fractionnaire.

REFERENCES

[1] M.A.Olshanetsky, A.M.Perelomov; Lett.Nuov.Cim. **16**(1976)333
M.A.Olshanetsky, A.M.Perelomov; Lett.Nuov.Cim. **17**(1976)97
M.A.Olshanetsky, A.M.Perelomov; Phys.Rep. **71** (1981) 314

[2] M.A.Olshanetsky, A.M.Perelomov; Phys.Rep.94, **6**(1983) 313

[3] A.M.Perelomov; Comm.Math.Phys. **63** (1978)9

[4] Das, A and S.Okubo, Ann.Phys. B282, **308** (1987)

[5] M.B.Sedra, thèse de 3ème cycle L.M.P.H.E. Mars(1993)

[6] Claude Cohen-Tannoudji; Bernard Diu; Franck Laloë Mécanique quantique(Tome I et II), Collection Enseignement des sciences, **16**(1973)

[7] V.K Dobrev Lectures on Lie algebras and their representation IC/88/96 Miramare-trieste, May(1988)

[8]] F.Calogero; J.Math.Phys.Vol 12.**3**(1971)419

[9] see e.g. "Calogero-Moser-Sutherland Models", J.F.Van Dijen and L.Vinet, eds, CRM Series in Mathematical Physics, Springer 2000

[10] L.Jonke, S.Meljanac, Phys.Lett.**B511**(2001)276

[11] P.D.Lax; Comm.Pure Appl.Math.**21**(1968)467

[12] M.Kessabi, thèse de doctorat, Lab/UFR PHE Juin(2001)

[13] F.Calogero; Lett.Nuov.Cim.**13**(1975)411

[14]] J.Moser; Adv.Math.**16**(1975)197

[15] F.Calogero; Lett.Nuov.Cim.**16**(1976)77

[16] M.A.Olshanetsky, A.M.Perelomov; Inv.Math. **37**(1976) 93

[17] I.M.Krichever; Funct.Anal.Appl.**14**(1980)282

[18] I.S.Gradshteyn, I.M.Ryzhik; Tables of integrals series and Products, Academic Press 1965.

[19] A.M.Perelomov; Integrable systems of classical Mechanics and Lie Algebras, Birkhäuser 1990.

[20] A.M.Perelomov; Theor.Math.Phys.**6**(1971)263.

[21] F.Calogero, Preprint, Institute di Fisica "G.Marconi", Nota Interna n.267 (1970) ; J.Math.Phys.,**12**(1971)

[22] A.M.Perelomov,V.S. Popov, and I.A.Malkin, Yad.Fiz.,2,**533**(1965); Preprint[in Russian], No.337, Institute of Theoretical and Experimental Physics(1965)

[23] Wu-Ki Tung; Group Theory in Physics, World Scientific Philadelphia.Singapore

[24] Timothy J.Hollowood [arXiv:hep-th/0305023v2 3 May 2003]; and ref.therein.