African Journal Of Mathematical Physics Vol **2** *No 1 (2005)11-17*

Systèmes hamiltoniens complètement intégrables et méthode de la courbe spectrale

A. Elachab

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences
Université Chouab Doukkali, El-Jadida , Maroc.

Résumé

A hamiltonian system with n degrees of freedom is called completely integrable if there exist n functionally independent smooth functions (constants of the motion) with vanishing Poisson brackets. The regular compact level manifolds defined by the intersection of the constants of motion are diffeomorphic to a real torus on which the motion is quasi-periodic as a consequence of the following purely differential geometric fact : a compact and connected n-dimensional manifold on which there exist n vector fields which commute and are independent at every point is diffeomorphic to an n-dimensional real torus and each vector field will define a linear flow there. New examples of completely integrable hamiltonian systems, which have recently been discovered, are based on the Lax representation of the equations of motion. These systems can be realized as straight line motions on a Jacobi variety of a so-called spectral curve. We make a study of the connection with the concept of completely integrable systems and we apply the Lax spectral curve technique to a hamiltonian system which, in a special case and under the gauge group $SU(2)$, can be considered as some reduction of the Yang-Mills field equations. We realize explicitly that the flows generated by the constants of the motion as straight lines on the Jacobi variety of a genus two Riemann surface.

I. SYSTÈMES INTÉGRABLES ET COURBE SPECTRALE

Soit M une variété différentiable de dimension paire. Une *structure symplectique* sur M est une 2-forme différentielle ω fermée et partout non-dégénérée. Le couple (M,ω) s'appelle *variété symplectique.*

Exemple 1 *Le fibré cotangent T^*M (l'union de tous les espaces cotangents à la variété M en tous ses points) possède une structure symplectique naturelle. Dans les coordonnées locales $(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m)$, cette structure est donnée par $\omega=\sum_{k=1}^{m}dx_k\wedge dy_k$.*

Proposition I.1
Soit $I:T_x^*M\longrightarrow T_xM,\ \omega_\xi^1\longmapsto\xi$, une application telle que: $\omega_\xi^1(\eta)=\omega(\eta,\xi)\,,\ \forall\eta\in T_xM$. Alors I est l'isomorphisme engendré par la forme symplectique ω.

Démonstration:
Désignons par I^{-1} l'application

$$I^{-1}:T_xM\longrightarrow T_x^*M,\ \xi\longmapsto I^{-1}(\xi)\equiv\omega_\xi^1,$$

avec $I^{-1}(\xi)(\eta)=\omega_\xi^1(\eta)=\omega(\eta,\xi)\,,\ \forall\eta\in T_xM$. Comme ω est bilinéaire, on a

$$\begin{aligned}I^{-1}(\xi_1+\xi_2)(\eta)&=\omega(\eta,\xi_1+\xi_2)\,,\\&=\omega(\eta,\xi_1)+\omega(\eta,\xi_2)\,,\\&=I^{-1}(\xi_1)(\eta)+I^{-1}(\xi_2)(\eta)\,,\ \forall\eta\in T_xM.\end{aligned}$$

Pour montrer que l'application I^{-1} est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective puisque $\dim T_xM = \dim T_x^*M$. On a

$$\begin{aligned} KerI^{-1} &= \{\xi \in T_xM : \omega(\eta,\xi) = 0,\ \forall \eta \in T_xM\} \\ &= \{0\}, \end{aligned}$$

car la forme ω est non-dégénérée. Donc I^{-1} est un isomorphisme et par conséquent I est aussi un isomorphisme puisque on l'obtient par l'inverse d'un isomorphisme.

On en déduit que la forme symplectique ω induit pour chaque fonction différentiable $H : M \longrightarrow \mathbf{R}$, appelée *hamiltonien*, un *champ de vecteurs hamilonien*

$$IdH : M \longrightarrow T_xM,\ x \longmapsto IdH(x).$$

Autrement dit, le système différentiel défini par

$$\frac{dx(t)}{dt} = X_H(x(t)) = IdH(x),$$

est un champ de vecteurs hamilonien associée à la fonction H.

Proposition I.2 .
La matrice associée à un système hamiltonien forme une structure symplectique.

Démonstration: Soit $(x_1,\ldots,x_m)$ un système de coordonnées locales sur M. On a

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial x_k} I(dx_k) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial x_k}\xi^k, \qquad (1)$$

où $I(dx_k) = \xi^k \in T_xM$ est défini de telle manière que :

$$\begin{aligned} &\forall\ \eta \in T_xM,\ \eta_k = dx_k(\eta) \\ &= \omega\left(\eta,\xi^k\right),\ (\ k^{i\grave{e}me}\text{composante de } \eta). \end{aligned}$$

En désignant par $(\eta_1,\ldots,\eta_m)$ et $\left(\xi_1^k,\ldots,\xi_m^k\right)$ les composantes de η et ξ^k respectivement, on obtient

$$\begin{aligned} \eta_k &= \sum_{i,j=1}^{m} \eta_i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\xi_j^k \\ &= (\eta_1,\ldots,\eta_m)\, J^{-1}\begin{pmatrix} \xi_1^k \\ \vdots \\ \xi_m^k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où J^{-1} est la matrice définie par

$$J^{-1} \equiv \left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)_{1\le i,j\le m}.$$

Cette matrice est inversible. Par conséquent, on peut chercher ξ^k tel que :

$$J^{-1}\begin{pmatrix} \xi_1^k \\ \vdots \\ \xi_m^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \longleftrightarrow k^{i\grave{e}me} \text{ place} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice J^{-1} est inversible, alors le système ci-dessus s'écrit

$$\begin{pmatrix} \xi_1^k \\ \vdots \\ \xi_m^k \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où $\xi^k = k^{i\grave{e}me}$ colonne de J, c'est-à-dire $\xi_i^k = J_{ik}$, $1 \le i \le m$, et par conséquent $\xi^k = \sum_{i=1}^{m} J_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}$. On montre aisément que la matrice J est antisymétrique. De (1) on déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{m} J_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m} J_{ik}\frac{\partial H}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

En écrivant $\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{dx_i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}$, on a l'équation suivante: $\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m} J_{ik}\frac{\partial H}{\partial x_k}$ où $1 \le i \le j \le m$, ou encore sous forme matricielle

$$\frac{dx(t)}{dt} = J(x)\frac{\partial H}{\partial x},$$

et qui n'est autre que le champ hamiltonien associé à la fonction H.

On munit la variété M du *crochet de Poisson* ou *structure de Poisson*

$$\begin{aligned} &\{,\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M), \\ &(F,G) \longmapsto \{F,G\}, \end{aligned}$$

où

$$\{F,G\} = d_uF(X_G) = X_GF(u) = \omega(X_G,X_F).$$

Ce crochet est antisymétrique $\{F,G\} = -\{G,F\}$, vérifie la formule de Leibniz $\{FG,H\} =$

$F\{G,H\}+G\{F,H\}$, et satisfait l'identité de Jacobi

$$\{\{H,F\},G\}+\{\{F,G\},H\}+\{\{G,H\},F\}=0.$$

Lorsque cette structure de Poisson est non-dégénérée, on parlera plutôt de structure symplectique.

Considérons maintenant la variété $M=\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ et soit $p\in M$. En vertu du théorème de Darboux [1], on peut choisir dans un voisinage du point p, un système de coordonnées locales $(y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_n)$ tel que la forme ω s'exprime sous la forme $\omega=\sum_{i=1}^n dx_i\wedge dy_i$. Dès lors $X_H=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}-\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$, et $X_HF=\{H,F\}$, $\forall F\in\mathcal{C}^\infty(M)$. Toute fonction F vérifiant la propriété $X_HF=0$, est dite *intégrale première* de X_F, celà signifie que F est constante sur les trajectoires de X_H. En particulier, on a $X_HH=0$. Deux fonctions F et G sont dites en *involution* quand leur crochet $\{F,G\}$ est nul.

Donnons-nous une autre formulation de la définition du crochet de Poisson. Celui-ci est donnée par

$$\{F,G\}=\left\langle\frac{\partial F}{\partial x},J\frac{\partial G}{\partial x}\right\rangle=\sum_{i,j}J_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}.$$

On montre que si

$$\sum_{k=1}^{2n}\left(J_{kj}\frac{\partial J_{li}}{\partial x_k}+J_{ki}\frac{\partial J_{jl}}{\partial x_k}+J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_k}\right)=0,\ \forall 1\le i,j,l\le 2n,$$

alors J satisfait à l'identité de Jacobi. Nous avons ainsi une caractérisation complète du champ de vecteurs hamiltonien

$$\frac{dx(t)}{dt}=X_H(x(t))=J\frac{\partial H}{\partial x},\ x\in M, \qquad (2)$$

où $H:M\longrightarrow\mathbf{R}$, est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (l'hamiltonien) et $J=J(x)$ est une matrice réelle antisymétrique satisfaisant à l'identité de Jacobi:

$$\{\{H,F\},G\}+\{\{F,G\},H\}+\{\{G,H\},F\}=0,$$

où

$$\{H,F\}=\left\langle\frac{\partial H}{\partial x},J\frac{\partial F}{\partial x}\right\rangle=\sum_{i,j}J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j},$$

sont les crochets de Poisson.

Exemple 2 *Si nous nous plaçons dans le cas où* $J=\begin{pmatrix}O&-I\\I&O\end{pmatrix}$, *avec* O *(resp.* I*) la matrice nulle (resp. unité) d'ordre* n, *alors la condition (voir proposition précédente) sur* J *est trivialement remplie. En effet, ici la matrice* J *ne dépend pas des variables* x_i *et nous avons*

$$\begin{aligned}\{H,F\}&=\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial H}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{2n}J_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_j}\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_{n+i}}\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_{n+i}}\right).\end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi la définition première du crochet de Poisson que l'on rencontre dans le formalisme hamiltonien classique. En outre, les équations (2) *se transforment immédiatement en un système de* n *équations différentielles:*

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial p_1},\ldots,\frac{dq_n}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_n},\\\frac{dp_1}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial q_1},\ldots,\frac{dp_n}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_n},\end{aligned}$$

où $q_1=x_1,\ldots,q_n=x_n,p_1=x_{n+1},\ldots,p_n=x_{2n}$. *Telles sont les équations de Hamilton, appelées aussi équations canoniques; elles montrent qu'il suffit de connaître la fonction hamiltonienne* H *pour déterminer les équations du mouvement. On les interprète souvent en considérant que les variables* p_k *et* q_k *sont les coordonnées d'un point qui se meut dans un espace à* $2n$ *dimensions, appelé* espace de phase. *Le flot associé au système ci-dessus laisse évidemment invariante chaque hypersurface d'énergie constante* $H=c$.

Le théorème d'Arnold-Liouville joue un rôle crucial dans l'étude des systèmes intégrables. Il permet, entre autres, d'étudier la situation topologique suivante : si les variétés invariantes sont compactes et connexes, alors elles sont difféomorphes aux tores réels sur lequels le flot de phase détermine un mouvement quasi-périodique. Les équations du problème à étudier sont intégrables par quadratures c'est-à-dire les solutions exactes s'expriment par un nombre fini de calculs d'intégrales et d'autres opérations algébriques. En outre, le théorème en question montre un comportement très régulier des solutions.

Proposition I.3 .
(théorème d'Arnold-Liouville) [1, 7] *: Considérons le système hamiltonien* (2) *associé à la fonction* H *sur la variété* M *de dimension* $m=2n$. *On suppose que ce système admet* n *intégrales premières*

$H_1 = H, H_2, ..., H_n$, en involution c'est-à-dire $\{H_i, H_j\} = 0$, $1 \leq i, j \leq n$, et fonctionnellement indépendantes c'est-à-dire $dH_1 \wedge \ldots \wedge dH_n \neq 0$, en tous les points d'un ouvert dense de M. Si les variétés invariantes

$$M_c \equiv \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in M : H_i(x) = c_i, \; c_i \in \mathbf{R}\},$$

sont compactes et connexes, alors elles sont difféomorphes au tore réel $\mathbf{R}^n/réseau$.

Une des conséquences du théorème d'Arnold-Liouville, est l'importante notion de complète intégrabilité du système (2) : On dit que le système (2) est *Liouville-intégrable* ou *complètement intégrable* s'il possède n intégrales premières $H_1 = H, H_2, ..., H_n$, fonctionnellement indépendantes en involution. D'après le théorème d'Arnold-Liouville, si pour presque tous les $c_i \in \mathbf{R}$ les variétés invariantes $\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in \mathbf{R}^{2n} : H_i(x) = c_i\}$, sont compactes et connexes, alors elles sont difféomorphes aux tore réel $T^n = \mathbf{R}^n/réseau = \{(\varphi_1, ..., \varphi_n) \mod 2\pi\}$. En outre les flots $g^t_{X_i}(x)$ définis par les champs de vecteurs $X_{H_i}, 1 \leq i \leq n$, sont des mouvements rectilignes. Ces flots déterminent sur T^n un mouvement quasi-périodique, c'est-à-dire en coordonnées angulaires $\varphi \equiv (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, on a $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, $\omega =$ constante. Les équations du problème sont intégrables par quadratures.

Une *équation de Lax* est une équation différentielle de la forme

$$\frac{dA(t)}{dt} = [A(t), B(t)], \tag{3}$$

avec $A(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k(t) h^k$, $B(t) = \sum_{k=1}^{N} B_k(t) h^k$, des fonctions dépendant d'un paramètre complexe h (paramètre spectrale) et où les A_k et B_k sont des matrices à coefficients dans une algèbre de Lie. Le couple (A, B) s'appelle *paire de Lax*. Les solutions de l'équation (3) sont $A(t) = g(t)A(0)g(t)^{-1}$, où $g(t)$ est la matrice définie par $\frac{dg(t)}{dt} = -A(t)g(t)$. Posons

$$P(h, z) = \det(A - zI),$$

où z est une autre variable et I la matrice unité d'ordre n. La courbe algébrique complexe projective $\mathcal{C}$, d'équation affine

$$P(h, z) = 0, \tag{4}$$

est appelée *courbe spectrale*. Un point (h, z) de cette courbe décrit une valeur propre z de la matrice A.

Proposition I.4 *Le polynôme caractéristique* (4) *ne dépend pas de t. En outre, pour tout $n \geq 0$, la fonction $tr(A^n)$ est une intégrale première.*

Démonstration: Posons $L \equiv A - zI$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \det L.tr\left(L^{-1}\frac{dL}{dt}\right) \\ &= \det L.tr\left(L^{-1}BL - B\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $trL^{-1}BL = trB$. On a $\frac{d(A^n)}{dt}$

$$\begin{aligned} &= \frac{d(A)}{dt}A^{n-1} + A\frac{d(A)}{dt}A^{n-2} + \cdots + A^{n-1}\frac{d(A)}{dt}, \\ &= [A, B]A^{n-1} + A[A, B]A^{n-2} + \cdots + A^{n-1}[A, B], \\ &= (AB - BA)A^{n-1} + \cdots + A^{n-1}(AB - BA), \\ &= ABA^{n-1} - BA^n + \cdots + A^nB - A^{n-1}BA, \\ &= A\left(BA^{n-1}\right) - \left(BA^{n-1}\right)A + \cdots \\ &+ A\left(A^{n-1}B\right) - \left(A^{n-1}B\right)A. \end{aligned}$$

Or pour $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $tr(X+Y) = trX + trY$, $trXY = trYX$, donc

$$\frac{d}{dt}tr\left(A_h^n\right) = tr\frac{d}{dt}\left(A_h^n\right) = 0,$$

et par conséquent $tr(A^n)$ sont des intégrales premières.

Nous avons montré que le spectre de A est un invariant (ne dépend pas de t) de la trajectoire de A sous le flot (3). Autrement dit, les coefficients du polynôme caractéristique $P(h, z)$ ne dépendent pas du temps t : ces coefficients sont déterminés uniquement par $tr(A^n)$ et ce sont des intégrales premières. En d'autres termes, on dit que l'équation différentielle (3) décrit une *déformation isospectrale*. D'après la proposition précédente, la courbe $\mathcal{C}$ ne dépend pas du temps, son équation s'écrit explicitement sous la forme

$$P(h, z) = h^N + p_1(z)h^{N-1} + \cdots + p_N(z),$$

et l'on peut utiliser les méthodes de la géométrie algébrique pour l'étudier. Le résultat principal ici est que lorsque un flot possède cette structure, alors celui-ci se linéarise sur la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$ c'est-à-dire sur un tore complexe algébrique engendré par le réseau défini par la matrice des périodes de la courbe $\mathcal{C}$. Signalons que dans un certain nombre de travaux, un lien avec la théorie des groupes et algèbres de Lie a été fait. Cette approche est basée sur un théorème d'Adler-Kostant-Symes [6] qui fournit des systèmes intégrables comme déformations isospectrales sur des orbites coadjointes dans des algèbres de Kac-Moody (extensions formelles de dimensions infinies d'algèbres de Lie semi-simples). Signalons aussi, pour information, que Griffiths [5] a trouvé des conditions nécessaires et suffisantes (de nature cohomologique) sur la matrice B, sans référence aux algèbres de Kac-Moody, pour que le flot de la forme de Lax puisse être linéarisé sur la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$ pour $\mathcal{C}$ défini par (4). Cette approche (courbe spectrale) a permis de découvrir une intéressante classe de systèmes intégrables. Comme nous l'avons déjà signalé, celà consiste à voir si l'on peut ramener les équations différentielles du problème à étudier à l'équation de Lax. Si c'est le cas, le spectre de la matrice A est indépendant du temps et fournit les intégrales premières en involution et le problème en question se linéarise sur la variété jacobienne de la courbe $\mathcal{C}$ (4). Donc dès que le flot possède cette structure de Lax, le reste suit de la théorie générale.

II. APPLICATION.

Soit F_{kl} le champ de Yang-Mills dans l'algèbre de Lie $T_eSU(2)$ du groupe $SU(2)$. C'est une expression locale du champ de Jauge ou connexion A_k définissant la dérivée covariante de F_{kl} à l'aide de l'expression:

$$\begin{aligned}\nabla_k F_{kl} &= \frac{\partial F_{kl}}{\partial \tau_k} + [A_k, F_{kl}] \\ &= 0,\ F_{kl}, A_k \in T_eSU(2), 1 \le k, l \le 4,\end{aligned}$$

dans laquelle $[A_k, F_{kl}]$ est le crochet des deux champs dans l'algèbre de Lie du groupe de Lie $SU(2)$ et

$$F_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial \tau_k} - \frac{\partial A_k}{\partial \tau_l} + [A_k, A_l],$$

Dans le cas qui nous intéresse, on a $\frac{\partial A_l}{\partial \tau_k} = 0$ $(k \neq 1)$, $A_1 = A_2 = 0$, $A_3 = n_1 U_1 \in su(2)$, $A_4 = n_2 U_2 \in su(2)$, où $n_1 = [n_2, [n_1, n_2]], n_2 = [n_1, [n_2, n_1]]$, engendre $su(2)$ et le système de Yang-Mills devient

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + U_1 U_2^2 = 0, \qquad \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + U_2 U_1^2 = 0,$$

avec $t = \tau_1$. En posant $U_1 = q_1$, $U_2 = q_2$, $\frac{\partial U_1}{\partial t} = p_1$, $\frac{\partial U_2}{\partial t} = p_2$, les équations de Yang-Mills s'écrivent sous la forme d'un champ de vecteurs hamiltonien

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= J\frac{\partial H}{\partial x}, \\ x &= (q_1, q_2, p_1, p_2)^T \\ J &= \begin{pmatrix} O & -I \\ I & O \end{pmatrix},\end{aligned}$$

où $H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 q_2^2\right)$. Ce système hamiltonian joue un rôle important en théorie des champs. En utilisant la transformation symplectique

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha(x_1 + x_2),\ p_2 = \alpha(x_1 - x_2), \\ q_1 &= \beta(y_1 + iy_2), q_2 = \beta(y_1 - iy_2),\end{aligned}$$

où $\alpha \equiv \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\beta \equiv \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{2}\right)^3$, on réecrit le hamiltonien ci-dessus sous la forme

$$H = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{4}\left(y_1^2 + y_2^2\right)^2.$$

Considérons une expression plus général de ce hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2\right) + \frac{1}{4}\left(y_1^2 + y_2^2\right)^2, \tag{5}$$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes. Le système correspondant est donné par

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= x_1, & \frac{dx_1}{dt} &= \left(\lambda_1 - y_1^2 - y_2^2\right) y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= \left(\lambda_2 - y_2^2 - y_1^2\right) y_2.\end{aligned} \tag{6}$$

Proposition II.1 *Le système différentiel* (6) *admet une paire de Lax de sorte que la fonction*

$$\begin{aligned} H_2 = &\frac{1}{4}\left(\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)^2 - \left(\lambda_2 y_1^4 + \lambda_1 y_2^4\right)\right) \\ &-\frac{1}{4}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) y_1^2 y_2^2 \\ &+\frac{1}{2}\left(\lambda_1\lambda_2\left(y_1^2 + y_2^2\right) - \left(\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2\right)\right).\end{aligned} \tag{2.1}$$

est une intégrale première quartique et la linéarisation s'effectue sur la jacobienne d'une courbe hyperelliptique de genre 2.

Démonstration: Nous allons montrer qu'il y a une autre intégrale première H_2 quartique qui détermine avec $H = H_1$ (5), un système intégrable. Pour déterminer explicitement cette intégrale première, on utilise la méthode de la courbe spectrale. Considérons la forme de Lax

$$\frac{d}{dt}A = [A, B],$$

où A et B sont des matrices à coefficients dans une algèbre de Lie. Nous avons démontré précédemment que les coefficients du polynôme caratéristique $\det(A - zI)$, ne dépendent pas du temps et ce sont des intégrales premières en involution. En outre, le flot se linéarise sur un tore algébrique complexe. Celui-ci étant engendré par le réseau défini par la matrice des périodes de la courbe algébrique complexe projective (ou courbe spectrale), d'équation affine

$$P(h,z) \equiv \det(A - zI) = 0, \tag{7}$$

et cette équation décrit une déformation isospectrale. Dans le cas de notre système, on choisit suivant une méthode d'Eilbeck & al.[3, 4] les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} U & V \\ W & -U \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ R & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} V &= -(h-\lambda_1)(h-\lambda_2) \times \\ &\quad (1 + \frac{1}{2}(\frac{y_1^2}{h-\lambda_1} + \frac{y_2^2}{h-\lambda_2})), \\ U &= \frac{1}{2}(h-\lambda_1)(h-\lambda_2) \times \\ &\quad (\frac{x_1 y_1}{h-\lambda_1} + \frac{x_2 y_2}{h-\lambda_2}), \\ W &= (h-\lambda_1)(h-\lambda_2) \times \\ &\quad (\frac{1}{2}(\frac{x_1^2}{h-\lambda_1} + \frac{x_2^2}{h-\lambda_2}) \\ &\quad -h + \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)), \\ R &= h - y_1^2 - y_2^2. \end{aligned}$$

Explicitement, l'équation (7) fournit

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : z^2 &= P_5(h), \\ &= (h-\lambda_1)(h-\lambda_2)(h^3 - (\lambda_1+\lambda_2)h^2 \\ &\quad +(\lambda_1\lambda_2 - H_1)h - H_2), \end{aligned} \tag{8}$$

avec H_1 donné dans (5) et

$$\begin{aligned} H_2 = &-\frac{1}{4}(\lambda_2 y_1^4 + \lambda_1 y_2^4 + (\lambda_1+\lambda_2)y_1^2 y_2^2 \\ &-(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2) \\ &-\frac{1}{2}(\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2 - \lambda_1\lambda_2(y_1^2 + y_2^2)). \end{aligned}$$

On vérifie aisément (calcul direct) que les deux intégrales premières H_1 et H_2 sont en involution:

$$\{H_1, H_2\} = \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_k}\frac{\partial H_2}{\partial y_k} - \frac{\partial H_1}{\partial y_k}\frac{\partial H_2}{\partial x_k} \right) = 0,$$

et que le système en question est intégrable. Le flot est donc linéaire dans la variété jacobienne de la courbe d'équation affine (8). Le polynôme $P_5(h)$ étant de degré cinq, la courbe est de genre 2 et on a donc une linéarisation sur la jacobienne d'une courbe hyperelliptique de genre 2. Introduisons deux coordonnées s_1 et s_2 sur la surface invariante

$$M_c = \bigcap_{i=1}^{2} \left\{ x \in \mathbf{C}^4 : H_i(x) = c_i \right\},$$

telles que : $M_c(s_i) = 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, i.e.,

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right) + \lambda_1 + \lambda_2, \\ s_1 s_2 &= \frac{1}{2}\left(\lambda_2 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2\right) + \lambda_1\lambda_2. \end{aligned}$$

Un calcul direct montre que :

$$\frac{ds_1}{dt} = 2\frac{\sqrt{P_5(s_1)}}{s_1 - s_2}, \quad \frac{ds_2}{dt} = 2\frac{\sqrt{P_5(s_2)}}{s_2 - s_1},$$

où le polynôme $P_5(s)$ est défini par (8). Ces équations s'intégrent via l'application d'Abel

$$\mathcal{H} \longrightarrow Jac(\mathcal{H}) = \mathbf{C}^2/L \ , \ p \longmapsto \left(\int_{p_0}^{p} \omega_1 \ , \ \int_{p_0}^{p} \omega_2 \right),$$

$\mathcal{H}$ est la surface de Riemann hyperelliptique donnée par l'équation (8), L est le réseau engendré par les vecteurs $n_1 + \Omega n_2, (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2$, Ω est la matrice des périodes de la surface de Riemann $\mathcal{H}$ et (ω_1, ω_2) une base de différentielles holomorphes sur $\mathcal{H}$, i.e.,

$$\omega_1 = \frac{ds}{\sqrt{P_5(s)}} \ , \quad \omega_2 = \frac{sds}{\sqrt{P_5(s)}},$$

avec p_0 un point fixé.

Remarque 1 *Les équations couplées non linéaires de Schrödinger s'écrivent:*

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \Omega_0 a + \frac{2}{3}\left(|a|^2 + |b|^2\right)a + \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2\right)\overline{a} = 0, \\ &i\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - \Omega_0 b + \frac{2}{3}\left(|a|^2 + |b|^2\right)b + \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2\right)\overline{b} = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions $a(z,t)$ et $b(z,t)$ dépendent des variables z et t, la notation "$-$" désigne l'opérateur de conjugaison complexe, "$||$" désigne le module et enfin Ω_0 est une constante. On cherche les solutions de (9) sous la forme:

$$a(z,t) = y_1(t)\exp(i\Omega z), \quad b(z,t) = y_2(t)\exp(i\Omega z),$$

où $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont deux fonctions et Ω une constante arbitraire. Dès lors, on obtient un système de deux équations différentielles non-linéaires de second ordre :

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \left(y_1^2 + y_2^2\right)y_1 = (\Omega - \Omega_0)\, y_1,$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + \left(y_1^2 + y_2^2\right)y_2 = (\Omega + \Omega_0)\, y_2.$$

Ce dernier s'écrit sous la forme du système hamiltonien (6) avec $\lambda_1 = \Omega - \Omega_0$, $\lambda_2 = \Omega + \Omega_0$ et il suffit d'appliquer le résultat obtenu précédemment.

III. REFERENCES

[1] Arnold V.I.: Mathematical methods in classical mechanics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York,1978.
[2] Belokolos, E.D., Bobenko, A.I., Enol'skii, V.Z., Its, A.R., Matveev, V.B.: Algebro-Geometric approach to nonlinear integrable equations, Springer-Verlag, 1994.
[3] Eilbeck, J.C., Enolskii, V.Z., Kuznetsov, V.B., Leykin, D.V.: Linear r-matrix algebra for systems separable in parabolic coordinates, Phys. Lett. A 180, 208-214 (1993).
[4] Eilbeck, J.C., Enolskii, V.Z., Kuznetsov, V.B., Tsiganov, A.V.: Linear r-matrix algebra for classical separable systems, J. Phys. A.: Math. Gen. 27, 567-578 (1994).
[5] Griffiths, P.A.: Linearizing flows and a comological interpretation of Lax equations. Amer. J. of Math. 107,1445-1483 (1985).
[6] Lesfari, A.: Completely integrable systems : Jacobi's heritage, J. Geom. Phys. 31, 265-286 (1999).
[7] Lesfari, A.: Le théorème d'Arnold-Liouville et ses conséquences. Elem. Math. Vol. 58, I. 1, 6-20 (2003).
[8] Lesfari, A. and Elachab, A. : On the integrability of the generalized Yang-Mills system. Applicationes Mathematicae (Warsaw), 31, 3 , 345-351 (2004).