African Journal Of Mathematical Physics Vol **2** *No 1 (2005)43-48*

Sur les symétries de l'équation de Burgers généralisée

A. Ouhadan and E. H. El Kinani*

Université Moulay Ismaïl, Faculté des Sciences et Techniques,
Département de Mathématiques, Laboratoire de Physique Mathématique
and
UFR de Sciences de l'Ingénieur, Faculté des Sciences et Technique,
Boutalamine B.P.509, Errachidia, Morocco.

Résumé

Nous montrons que l'équation de Burgers généralisée n'admet pas des symétries propres de Lie *Bäcklund* d'ordre 2 et 3. En examinant l'algèbre constituée des générateurs de son groupe de symétrie à un paramètre, on remarque qu'elle contient une sous algèbre de dimension infinie. Cette symétrie infinie permet la possibilité de transformer l'équation de Burgers généralisée en une équation linéaire type de la chaleur.

I. INTRODUCTION

A la fin du dix-neuvième siècle, S. Lie[1,2] établissait les fondements de la théorie des groupes de transformations. L'apport le plus frappant de S. Lie fut de découvrir que la majorité des méthodes d'intégration, jusqu'alors artificielles et isolées, étaient intrinsèquement liées à l'étude structurale du groupe de symétrie d'une équation différentielle arbitraire. Cette symétrie lui permet notamment d'aborder la classification des équations différentielles ordinaires d'ordre quelconque, de déterminer une famille de solutions appelées solutions invariantes, de transformer une équation non linéaire en une équation linéaire et de déterminer les lois de conservation. Le groupe de symétrie ponctuel d'un système d'équations aux dérivées partielles de variables indépendantes $x = (x_1, ..., x_p)$ et variables dépendantes $u = (u^1, ..., u^q)$, est un ensemble de transformations qui laisse invariant les solutions d'une telle équation.

Ce travail est organisé comme suit :

La première partie sera consacrée aux rappels des symétries d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) et le critère d'invariance d'un tel système par un groupe de Lie (pour plus de détails voir[3,4-5,6])

Quant à la deuxième partie on va calculer le groupe de symétie de l'équation de Burgers généralisée, puis on détermine une application qui permet de transformer notre équation non linéaire en une équation linéaire type de la chaleur.

Dans la dernière section, on montre que l'équation Burgers généralisée n'admet pas des symétries de type Lie-*Bäcklund* d'ordre 2 et 3.

II. GÉNÉRALITÉS

A. Symmetries d'un système aux dérivées partielles

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre n à p variables indépendantes $(x_1, ..., x_p)$ et q variables dépendantes $(u^1, ..., u^q)$ noté sous la forme

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1, ..., l \qquad (2.1)$$

* *Junior Associate at The Abdus Salam ICTP, Trieste, Italy. e-mail hkinani@ictp.trieste.it*

où $u^{(n)}$ désigne toutes les dérivées partielles de u par apport à x d'ordre inférieur où égale à n.

Définition.1 On appelle un groupe de Lie de transformations à un paramètre (G_ϵ) l'ensemble des transformations définies par :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i &= x_i + \epsilon\xi_i(x,u) + O(\epsilon^2); \quad i = 1,...,p;\\ \tilde{u}^j &= u^j + \epsilon\eta_j(x,u) + O(\epsilon^2); \quad j = 1,...,q;\end{aligned}$$

où :

$$\xi_i(x,u) = \left(\frac{d\tilde{x}_i}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0}; \quad i = 1,...,p;$$

et

$$\eta_i(x,u) = \left(\frac{d\tilde{u}^i}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0}; \quad j = 1,...,q;$$

le générateur V associé à ce groupe de transformations s'ecrit sous la forme :

$$V = \sum_{i=1}^{i=p}\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{j=q}\eta_j(x,u)\frac{\partial}{\partial u_j}. \tag{2.2}$$

Définition.2

On appele le prolongement d'ordre n de V sur $M^{(n)}$ la quantité donnée par[3]:

$$Pr^{(n)}V = V + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J \varphi_\alpha^J(x,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_\alpha^J}$$

avec $J = (j_1,\cdots,j_k)$, où $1 \le j_k \le p$, $1 \le k \le n$ et

$$\varphi_\alpha^J(x,u^{(n)}) = D_J(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_\alpha^i) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_\alpha^{J,i}$$

où

$$u_\alpha^i = \frac{u_\alpha}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad u_\alpha^{J,i} = \frac{u_\alpha^J}{\partial x_i},$$

$M^{(n)}$ désigne l'espace prolongé de M contenu dans $X \times U^{(n)}$, avec $U^{(n)}$ est l'espace de toutes les dérivées partielles des composantes de u d'ordre inférieur ou égal à n.

B. Critère d'invariance

L'invariance de système d'équations Eq.(1) que l'on suppose du rang maximal par les transformations précédentes se traduit par le critère d'invariance suivant[3,4]: Si

$$Pr^{(n)}V(\Delta_\nu(x,u^{(n)}))_{\Delta_\nu(x,u^{(n)})=0,} = 0, \tag{2.3}$$

$\nu = 1,...,l$, pour tout V générateur d'un groupe G, alors G est un groupe de symétrie de système Eq.(2.1).

III. SYMÉTRIES DE L'ÉQUATION DE BURGERS GÉNÉRALISÉE

Rappelons tout d'abord que l'équation de Bergers $u_t = u_{xx} + u_x^2$, joue un rôle important en physique, elle décrit la propagation des ondes non linéaire dans un milieu gazeux[3,8]. Cette équation a été initialement introduite par Bergers pour décrire le mouvement de turbulence unidimensionnel, elle représente l'exemple le plus simple d'équation d'ondes combinant l'effet dispersif et l'effet non linéaire. Elle est utilisée plus tard pour modéliser d'autre phénomènes physique. Nons considérons l'équation de Burgers généralisée donnée par :

$$u_t = u_{xx} + g(u)u_x^2, \tag{3.1}$$

avec $g(u)$ est une fonction régulière, qui dépend uniquement de u et dont la primitive est $f(u)$.

Cas particuliers importants

- Si $g(u) = 0$, alors l'équation généralisée n'est rien d'autre que l'équation de la chaleur :

$$u_t = u_{xx}, \tag{3.2}$$

- Si $g(u) = 1$, on retrouve l'équation de Burgers classique :

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \tag{3.3}$$

A. Détermination des symétries de l'équation de Burgers généralisée

Considérons le générateur V des transformations de l'équation (3.1) donné par la forme :

$$\begin{aligned}V = \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x}&\\ +\eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} &+ \varphi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour appliquer le critère d'invariance on aurra besoin du prolongement d'ordre 2 de V soit :

$$\begin{aligned}Pr^{(2)}V = V + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x}&\\ +\varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} &+ \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}\\ +\varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} &+ \varphi^{tx}\frac{\partial}{\partial u_{tx}},\end{aligned} \tag{3.5}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\varphi^x &= D_x\varphi - u_x D_x\xi - u_t D_x\eta,\\
\varphi^t &= D_t\varphi - u_x D_t\xi - u_t D_t\eta,\\
\varphi^{xx} &= D_x^2\varphi - u_x D_x^2\xi - u_t D_x^2\eta \\
&\quad -2u_{xx}D_x\xi - 2u_{xt}D_x\eta,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où D désigne la dérivée totale.

Remarquons qu'on a pas établit les expressions de φ^{tx} et de φ^{tt} car l'équation de Burgers généralisée ne dépend pas de la dérivée mixte, ainsi que de la dérivée d'ordre 2 par rapport au temps.

En substituant les expressions de φ^x, φ^t et φ^{xx} dans Eq.(3.5) et en utilisant le critère d'invariance[3,4], on obtient le système déterminant les symétries de l'équation de Burgers généralisée soit :

$$0 = \eta_u, \tag{3.7}$$
$$0 = \eta_x, \tag{3.8}$$
$$0 = \xi_u, \tag{3.9}$$
$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{uu} + g(u)\varphi_u + g'(u)\varphi \\ &\quad +\eta_t g(u) - 2g(u)\xi_x, \end{aligned} \tag{3.10}$$
$$0 = 2\xi_x - \eta_t, \tag{3.11}$$
$$0 = \xi_t + 2g(u)\varphi_x + 2\varphi_{xu} - \xi_{xx}, \tag{3.12}$$
$$0 = \varphi_t - \varphi_{xx}, \tag{3.13}$$

Après intégration, on obtient:

$$\begin{aligned}
\xi(x,t,u) &= 4a_1tx + a_2x + 2a_4t + a_5,\\
\eta(x,t,u) &= 4a_1t^2 + 2a_2t + a_3,\\
\varphi(x,t,u) &= B(t,x)\exp(-f(u)) \\
&\quad +(-a_1x^2 - a_4x - 2a_1t + a_6)h(u),
\end{aligned}$$

où

$$h(u) = \exp(-f(u))\int \exp(f(u))du,$$

$a_1, ..., a_6$ sont des constantes arbitraires, et $B(t,x)$ est une solution quelconque de l'équation de la chaleur.

Ainsi l'algèbre associée au groupe de symétrie de l'équation de Burgers généralisée est engendrée par les générateurs suivants :

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.14}$$
$$V_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.15}$$
$$V_3 = h(u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.16}$$
$$V_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.17}$$
$$V_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xh(u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.18}$$
$$\begin{aligned} V_6 &= 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} \\ &\quad -(2t+x^2)h(u)\frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

et la sous algèbre de dimension infinie:

$$V_B = B(t,x)\exp(-f(u))\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.20}$$

Cette sous algèbre de dimension infinie joue un rôle important dans la linéarisation de l'équation de Burgers généralisée.

IV. TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION DE BURGERS GÉNÉRALISÉE EN ÉQUATION DE LA CHALEUR

A. Comparaison des algèbres associés aux groupes de symétries

Les générateurs de symétries associés à l'équation de la chaleur sont donnés par[3]:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \tag{4.1}$$
$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t}; \tag{4.2}$$
$$X_3 = u\frac{\partial}{\partial u}; \tag{4.3}$$
$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}; \tag{4.4}$$
$$X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}; \tag{4.5}$$
$$\begin{aligned} X_6 &= 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} \\ &\quad -(2t+x^2)u\frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

et la sous algèbre de dimension infinie :

$$X_\theta = \theta(t,x)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4.7}$$

avec θ est une solution arbitraire de l'équation de la chaleur.

Les générateurs associés à l'équation de Burgers généralisée sont :

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \tag{4.8}$$
$$V_2 = \frac{\partial}{\partial t}; \tag{4.9}$$
$$V_3 = h(u)\frac{\partial}{\partial u}; \tag{4.10}$$
$$V_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}; \tag{4.11}$$

$$V_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xh(u)\frac{\partial}{\partial u}; \quad (4.12)$$

$$V_6 = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} -(2t + x^2)h(u)\frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.13)$$

et la sous algèbre de dimension infinie :

$$V_B = B(t,x)\exp(-f(u))\frac{\partial}{\partial u}. \quad (4.14)$$

L'importante ressemblance entre les algèbres associées aux groupes de symétrie de ces deux équations nous laisse penser que l'équation de Burgers généralisée peut se transformer en l'équation de la chaleur.

Ainsi, en exploitant l'idée donnée par Bluman et Kumei[7], qui dit que si un système non linéaire admet un groupe de Lie de transformations a une infinité de paramètres de générateur infinitesimal :

$$V = \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_j(x,u)\frac{\partial}{\partial u^j}, \quad (4.15)$$

avec :

$$\xi_i(x,u) = \sum_{\sigma=1}^{q} \alpha_i^\sigma(x,u)F^\sigma(x,u), \quad (4.16)$$

$i = 1,...,p$ et

$$\eta_j(x,u) = \sum_{\sigma=1}^{q} \beta_j^\sigma(x,u)F^\sigma(x,u), \quad (4.17)$$

$j = 1,...,q$ où $\alpha_i^\sigma(x,u)$ et $\beta_j^\sigma(x,u)$ sont des fonctions de (x,u), et $F(x,u)$ est une solution d'un système EDP linéaire noté (L), alors il existe une application :

$$z_i = k_i(x,u), \quad i = 1,...,p;$$

$$w^j = \Psi^j(x,u), \quad j = 1,...,q;$$

qui transforme le système non linéaire en un système linéaire (L) . Dans ce cas les composantes de $(k_1,...,k_p)$ de k sont solutions du système :

$$\alpha_i^\sigma(x,u)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \beta_j^\sigma(x,u)\frac{\partial\theta}{\partial u^j} = 0, \quad (4.18)$$

$\sigma = 1,...,q$; Et le système :

$$\alpha_i^\sigma(x,u)\frac{\partial\Psi^\nu}{\partial x_i} + \beta_j^\sigma(x,u)\frac{\partial\Psi^\nu}{\partial u^j} = \delta^{\sigma\nu}, \quad (4.19)$$

$\sigma = 1,...,q$ où $\delta^{\sigma\nu}$ désigne le symbole de kronecker, $\nu,\sigma = 1,...,q$; admet une solution $\Psi = (\Psi^1(x,u),...,\Psi^q(x,u))$.

Dans notre cas le générateur qui engendre un groupe de transformations à une infinité de paramètres est :

$$V_B = B(t,x)exp(-f(u))\frac{\partial}{\partial u}. \quad (4.20)$$

A partir des équations (4.16) et (4.17), on obtient :

$$\alpha_1^1 = \alpha_2^1 = 0; \quad \beta_1^1 = exp(-f(u)),$$

le système (4.18) devient :

$$\beta_1^1(x,u)\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0,$$

clairement deux solutions indépendantes k_1 et k_2 peuvent-être choisies :

$$k_1 = x; \qquad et \qquad k_2 = t;$$

l'équation (4.19) devienne :

$$exp[-f(u)]\frac{\partial\Psi}{\partial u} = 1,$$

donc $\Psi = \int exp(f(u))du$ d'où l'application cherchée :

$$z_1 = x; \qquad z_2 = t,$$
$$w = \int exp(f(u))du,$$

alors par cette application les V_i de l'équation de Burgers généralisée sont transformés en X_i correspondant de l'équation de la chaleur, et aussi toute solution de l'équation de Burgers généralisée est transformée en une solution de l'équation de la chaleur.

Un cas particulier important est obtenu lorsque $g(u) = 1$, l'équation de Burgers généralisée devienne l'équation de Burgers standard, et donc on retrouve l'application classique :

$$z_1 = x, \quad z_2 = t, \quad w = e^u,$$

qui transforme l'équation de Burgers standard en équation de la chaleur.

V. LES SYMÉTRIES GÉNÉRALISÉES

Définition.3

On appelle transformations de Lie-*Bäcklund* d'ordre l[3,4] toute transformation de la forme :

$$\tilde{x}_i = x_i + \epsilon\xi_i(x,u,u_1,...,u_l) + O(\epsilon^2), \quad i = 1,...,p;$$
$$\tilde{u}^j = u^j + \epsilon\eta_j(x,u,u_1,...,u_l) + O(\epsilon^2), \quad j = 1,...,q; \quad (5.1)$$

où u_i désigne toutes les dérivées partielles d'ordres inférieur ou égal à i des composantes de u.

Remarque

Les transformations ci-dessus sont équivalentes aux transformations de la forme[3] :

$$\tilde{x}_i = x_i, \quad i = 1, ..., p;$$

$$\tilde{u}^j = u^j + \epsilon\Big(\eta_j(x, u, u_1, ..., u_l) - \sum_{i=1}^{p} \xi_i u_i^j\Big) + O(\epsilon^2), \tag{5.2}$$

avec $j = 1, ..., q$. Par conséquent au lieu d'utiliser un générateur de la forme Eq.(3.4) on peut se restreindre à un générateur de la forme :

$$V = Q(x, u_1, ..., u_l)\frac{\partial}{\partial u};$$

Q est appelée la caractéristique de V. Pour notre équation on a :

$$(x_1, x_2, u_1, u_2, ...) = (x, t, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, ...).$$

Définition.4

On dit que les transformation Eq.(5.2) de générateur infinitésimal :

$$V = Q(x, u_1, ..., u_k)\frac{\partial}{\partial u};$$

définie une symétrie de Lie-*Bäcklund* à l'ordre k[3] pour un système EDP (1) ssi :

$$Pr^{(n)}V(\Delta_\nu(x, u_1, ..., u_n))_{/\Delta=0} = 0, \qquad \nu = 1, ..., l; \tag{5.3}$$

où :

$$\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_l).$$

Pour déterminer des symétries généralisées pour une équation, on fixe le k, puis on applique le critère d'invariance.

A. Application à l'équation de Burgers généralisée

1. Case. 1 : $k = 2$

Les dérivées u_t et u_{tx} sont remplacées par leurs expressions prevenant de l'équation elle même, puis on cherche la caractéristique Q qui est de la forme :

$$Q = Q(x, t, u, u_x, u_{xx}). \tag{5.4}$$

En appliquant le critère d'invariance, on trouve:

$$D_tQ = D_x^2Q + g'(u)Qu_x^2 + 2g(u)D_xQu_x; \tag{5.5}$$

où D_i désigne la dérivée totale. On explicite cette expression, et en substituant aux dérivées contenant les dérivées par rapport au temps leurs expressions, on obtient un polynôme nul en (u_x, u_{xx}, u_{xxx}). L'analyse des coefficients des termes en dérivées d'ordre 3 qui sont :

$$0 = \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 u_{xx}}u_{xxx}^2 + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial u_x \partial u_{xx}}u_{xxx}u_{xx} + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial u_{xx}}u_{xxx}u_x + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial u_{xx}}u_{xxx}.$$

Nous conduit à :

$$Q = \alpha(t)u_{xx} + Q'(t, x, u, u_x).$$

On passe aux coefficients des termes d'ordre 2:

$$0 = \frac{\partial^2 Q'}{\partial^2 u_x^2}u_{xx}^2 + 2\frac{\partial^2 Q'}{\partial u \partial u_x}u_x u_{xx} + (\alpha_t - 2\frac{\partial^2 Q'}{\partial x \partial u_x})u_{xx} + 4\alpha g'(u)u_x^2 u_{xx};$$

le coefficient de $u_x^2 u_{xx}$ est :

$$4g'(u)\alpha;$$

par conséquent : $4g'(u)\alpha = 0$, entraîne que $g'(u) = 0$, ou $\alpha = 0$. Ainsi on conclut que si l'équation de Burgers généralisée admet une symétrie de Lie-*Bäcklund* d'ordre 2 alors nécessairement $g = cte$.

2. **Case.2** *: $k = 3$*

On refait les calculs comme dans le cas précédent mais en prenant Q de la forme :

$$Q = Q(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}). \tag{5.6}$$

Le critère d'invariance donne :

$$D_tQ = D_x^2Q + g'(u)Qu_x^2 + 2g(u)D_xQu_x, \tag{5.7}$$

analysant les coefficients des termes en dérivées d'ordre 4 qui sont :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 u_{xxx}}u_{xxxx}^2 + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial u_{xx}\partial u_{xxx}}u_{xxxx}u_{xxx} + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial u_x \partial u_{xxx}}u_{xxxx}u_{xx} + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial u_{xxx}}u_{xxxx}u_x$$

$$+2\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial u_{xxx}} u_{xxxx} = 0;$$

ceci entraîne :

$$Q = \beta(t) u_{xxx} + Q^{'}(t, x, u, u_x, u_{xx}). \qquad (5.8)$$

Les coefficients des termes d'ordre 3 sont :

$$-\frac{\partial^2 Q^{'}}{\partial^2 u_{xx}^2} u_{xxx}^2 + (6g(u)\beta - 2\frac{\partial^2 Q^{'}}{\partial u \partial u_x}) u_{xx} u_{xxx}$$
$$+(\beta_t - 2\frac{\partial^2 Q^{'}}{\partial x \partial u_{xx}}) u_{xxx}$$

$$+6\beta g^{'}(u) u_x^2 u_{xxx} - 2\frac{\partial^2 Q^{'}}{\partial u \partial u_{xx}} u_x u_{xxx} = 0.$$

Le coefficient de $u_x^2 u_{xxx}$ est : $6g^{'}(u)\beta$, par conséquent:
$6g^{'}(u)\beta = 0$, donc $g = cte$ ou $\beta = 0$. De même on conclut que si l'équation de Burgers généralisée admet des symétries de Lie-*Bäcklund* d'ordre 3 alors nécessairement $g = cte$.

B. Conclusion

Dans ce travail nous avons étudié les symétries de l'équation de Burgers généralisée, nous avons montré l'existance d'une symétrie infinie, celle-ci nous a permé la possibilité de passer d'une équation non linéaire en une équation linéaire. Nous avons démontré également que pour les fonctions non constantes $g(u)$ les équations de Burgers généralisée correspondantes n'admettent pas des symétries propres de Lie-*Bäcklund* d'ordre 2 et 3.

VI. REFERENCES

[1] Lie, S. and Engel, F., *Theorie der Tranformationsgruppen* **Vol.39**, Leipzig Teubner (1890).
[2] Lie, S.,*Theorie der Tranformationsgruppen*, Math.Ann.**16**(1880), 441-528.
[3] Olver P.J, *Application of Lie groups to Differential Equation*, Springer, New York (1986).
[4] Olver P.J *Equivalence, Invariance and symmetries*, Camridge, Camridge University Press, (1995).
[5] Stephani H, *Differential equations: Their Solution Using Symmetries*, Cambridge University Press, (1989).
[6] P. H. Hydon, *Symmetry Methods for Differential Equations A Beginner's Guide*, Cambridge Texts in Applied. Mathematics, (1989).
[7] Bluman G.W and Kumei, *Symmetries and Differentials Equations*, Springer, New York (1989).
[8] I.S. Krasil'shchik and A.M.Vinogradov, *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics*, Mathematical Monographs Vol. 182, (1999).