*African Journal Of Mathematical Physics Vol **2** No 1 (2005)49-52*

Structures de Lie-Poisson sur $SU(2)$ et $SL(2,\mathbf{R})$

S. Benmouloud*, B. Ganbouri†, SM. Sbai‡

E.G.A.L Départment of Mathematics, Faculty of Sciences
University Ibn Tofail, Kenitra , Morocco.

Abstract

We show that every multiplicativ Poisson tensor on $Su(2)$ or $SL(2,\mathbf{R})$ is linearizable in a neighborhood of the identity element.

Nous montrons que toutes les structures de lie-Poisson sur $SU(2)$ et $SL(2,\mathbf{R})$ sont linéarisables.

I. INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie et $P \in \bigwedge^2 TG$ une structure de Poisson sur G. Elle est dite de lie-Poisson si le bivecteur P est multiplicatif:

$$P(x.y) = L_{x_*}P(y) + R_{y_*}P(x),$$

où L_{x_*} (resp. R_{x_*}) désigne la différentielle de la translation à gauche, (resp. à droite) par x en l'unité du groupe. Si e désigne le neutre de G, on voit que $P(e) = 0$.
Soit $(x^1, ..., x^n)$ un système de coordonnées locales dans un voisinage U de e, en tout point $x \in U$, on a:

$$P(x) = \sum_{1\leq i<j\leq n} P_{ij}(x).\partial_{x^i} \wedge \partial_{x^j}.$$

La série de Taylor des fonctions $P_{ij}(x)$ sécrit:

$$P_{ij}(x) = C_k^{ij}.x^k + \theta_k^{ij}(x).x^k,$$

où $C_k^{ij} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x^k}(e)$ et $\theta_k^{ij}(x)$ sont des fonctions s'annulant en e.
Dans cette note on s'intéresse au probléme de linéarisartion suivant:
existe-t-il un système de coordoonées locales où les $\theta_k^{ij}(x)$ sont les fonctions nulles de sorte que l'expression du bivecteur P se réduise à sa partie linéaire?
Nous répondons affirmativement à cette question dans le cas des groupes $SU(2)$ et $SL(2,\mathbf{R})$. Notre base de travail est la classification de C.Ohn[O].
Dans la section 2 nous rappelons quelques définitions et résultats préliminaires, puis proposons une linéarisation des structures de Lie-Poisson sur $SU(2)$ et $SL(2,\mathbf{R})$ dans la section 3.

II. GROUPE DE LIE-POISSON

A. Définition

Soit G un groupe de Lie et $P \in \Lambda^2 TG$ une structure de Poisson sur G. Le bivecteur P est appelé structure de Lie-Poisson sur G, s'il est compatible avec la loi du groupe:

$$P(x.y) = L_{x_*}P(y) + R_{x_*}P(x), \quad x, y \in G,$$

*Ben.sam@netcourier.com
†G_busslem@yahoo.fr
‡Sbaisimo@netcourier.com

où L_{x_*} (resp. R_{x_*}) désigne la différentielle de la translation à gauche, (resp. à droite) par x, en l'unité du groupe. Si e désigne le neutre de G, on a $P(e) = 0$.

B. Expression infinitésimale

Soit g l'algèbre de Lie du groupe de Lie G et soit

$$\begin{aligned} p : g &\longrightarrow \Lambda^2 g \\ X &\longmapsto p(X) = (d_e P)(X). \end{aligned}$$

Cette application possède les deux propriétés suivantes:
2.2.1 **Compatibilité avec la structure de Lie de g.**
On prolonge l'action adjointe de g à $\Lambda^2 g$ par

$$X.(A \wedge B) = [X, A] \wedge B + A \wedge [X, B].$$

On a alors:

$$p([X, Y]) = X.p(Y) - Y.p(X).$$

Cette relation est une condition de 1-cocycle, ($\delta p = 0$), dans la cohomologie de Chevalley, pour la structure de $g-$module sur $\Lambda^2 g$. On a donc $p \in H^1_{Ch}(g, \Lambda^2 g)$.
2.2.2 **Algèbre de Lie linéarisée**
L'application transposée de $p : p^* : \Lambda^2 g^* \longrightarrow g^*$ définit une structure d'algèbre de Lie sur g^*, appelée algèbre de Lie linéarisée associée à P.
Un théorème de Drinfeld $[D]$ établit une correspondance biunivoque entre les structures de Lie-Poisson sur les groupes simplement connexe et les structures $(g, [,], p)$.

III. CAS SEMI-SIMPLE

Dans ce cas $H^1_{Ch}(g, \Lambda^2 g) = 0$, ainsi le cocycle p est exact: $\exists Q \in \Lambda^2 g$ tel que $p = \partial Q$. Autrement dit:

$$p(X) = X.Q, \quad X \in g.$$

De plus, le bivecteur Q qui vérifie l'équation de Yang-Baxter $[Q, Q]_s = 0$, définit une structure multiplicative sur G par:

$$P = \widetilde{Q} - \widehat{Q},$$

où $\widetilde{Q}$,(resp. $\widehat{Q}$), est le bivecteur invariant à gauche (resp.à droite) sur G, associé à Q.

A. Dimension Trois

Les structures de Lie-Poisson sur $SU(2)$ et $SL(2, \mathbf{R})$ ont été calculées par C.Ohn $[O]$: les solutions de Yang-Baxter sur les algèbres de Lie respectives fournissent le cocycle p et le bivecteur multiplicatif P.
Nous montrons que toutes ces structures sont linéarisables au voisinage de l'élément neutre.

B. Linéarisation

La comparaison des lieux singuliers et feuilletages symplectiques des structures de Poisson sur g et G indique une solution du système d'équations:

$$\{\varphi_i, \varphi_j\} = C^k_{ij} \varphi_k, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

où $\{,\}$ désigne le crochet de Poisson sur $C^\infty(G)$, associé à P par

$$\{f, g\} = P(df \wedge dg),$$

et $(C^k_{ij})_{1 \leq i,j,k \leq 3}$ sont les constantes de structures de l'algèbre de Lie (g^*, p^*), linéarisée de P.
Il suffit alors de vérifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est un système de coordonnées au voisinage de e tel que $\varphi_i(e) = 0, \quad i = 1, 2, 3$.

C. Le groupe $SU(2)$

On considére le groupe de lie

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = \mathbf{1} \right\},$$

son algèbre de Lie est:

$$su(2) = \left\{ S \in \mathbf{C}^{2\times2} / \ {}^t\overline{\mathbf{S}} + \mathbf{S} = \mathbf{0} \ \ \mathbf{et} \quad \mathbf{Tr}\,(\mathbf{S}) = \mathbf{0} \right\}.$$

Soit:

$$X = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} ; Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ Z = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

une base $su(2)$. Le crochet de Lie est défini par:

$$[Z, X] = 2Y \ ; \ [Z, Y] = -2X \ ; \ [X, Y] = 2Z.$$

Les champs invariants à gauche associés à la base de $su(2)$ ont pour expression:

$$\widetilde{X} = -y\partial_x + x\partial_y + t\partial_z - z\partial_t$$

$$\widetilde{Y} = -z\partial_x - t\partial_y + x\partial_z + y\partial_t$$

$$\widetilde{Z} = -t\partial_x + z\partial_y - y\partial_z + x\partial_t$$

. Une famille de solutions de Yang-Baxter est:

$$Q = k.X \wedge Y, \quad k \in \mathbf{R}_+^*.$$

. Cocycle: pour $a, b, c \in \mathbf{R}$, p a pour expression:

$$p(aX + bY + cZ) = 2kbY \wedge Z - 2kaZ \wedge X.$$

. Structures de Lie-Poisson:

$$\begin{aligned} P(x,y,z,t) = 2k(xz-yt)\widetilde{Y} \wedge \widetilde{Z} \\ -2k(xy+zt)\widetilde{Z} \wedge \widetilde{X} \\ +2k(y^2+z^2)\widetilde{X} \wedge \widetilde{Y}. \end{aligned}$$

. Coordonnées linéarisantes:
Proposition: l'application $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$:

$$\varphi(x,y,z,t) = \left(y, z, Arc\tan\frac{t}{x}\right),$$

est un difféomorphisme au voisinage de $e = (1,0,0,0)$, avec $\varphi_i(e) = 0,\ i = 1,2,3$ et

$$\begin{aligned} \{\varphi_2, \varphi_3\} &= 2k\varphi_2 \\ \{\varphi_3, \varphi_1\} &= -2k\varphi_1 \\ \{\varphi_1, \varphi_2\} &= 0. \end{aligned}$$

D. Le groupe $SL(2,\mathbf{R})$

On considére le groupe de Lie

$$SL(2,R) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / x,y,z,t \in R; (xt-yz) = 1 \right\},$$

son algèbre de Lie est:

$$sl(2,\mathbf{R}) = \left\{ \mathbf{S} \in \mathbf{R}^{2\times 2} / \ \mathbf{Tr}\,(\mathbf{S}) = \mathbf{0} \right\},$$

de base:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \ Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \ Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le crochet de Lie est défini par:

$$[Z,X] = -2Y; \ [Z,Y] = 2X; \ [X,Y] = 2Z.$$

La base de champs invariants à gauche sur $SL(2,\mathbf{R})$ est:

$$\begin{aligned} \widetilde{X} &= x\partial_x - y\partial_y + z\partial_z - t\partial_t \\ \widetilde{Y} &= y\partial_x + x\partial_y + t\partial_z + z\partial_t \\ \widetilde{Z} &= -y\partial_x + x\partial_y - t\partial_z + z\partial_t. \end{aligned}$$

3.4.1 **Première famille de solutions de Yang-Baxter.**

$$Q = k.X \wedge Y, \quad k \in \mathbf{R}_+^*.$$

. Cocycle: pour $a, b, c \in \mathbf{R}$, p a pour expression:

$$p(aX + bY + cZ) = 2kbY \wedge Z - 2kaZ \wedge X.$$

. Structures de Lie-Poisson:

$$\begin{aligned} P(x,y,z,t) &= k(xy+zt)\widetilde{Y} \wedge \widetilde{Z} \\ &\quad -\frac{1}{2}k(x^2-y^2+z^2-t^2)\widetilde{Z} \wedge \widetilde{X} \\ &\quad +k(1-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+t^2))\widetilde{X} \wedge \widetilde{Y}. \end{aligned}$$

. Coordonnées linéarisantes:
Proposition: P est linéaire sur un voisinage de $e = (1,0,0,1)$ dans le système de coordonnées

$$(x-t, y+z, Arc\tan\frac{y-z}{x+t}).$$

3.4.2 **Deixième famille de solutions de Yang-Baxter.**

$$Q = k.X \wedge Z, \quad k \in \mathbf{R}_+^*.$$

. Cocycle:

$$p(aX + bY + cZ) = -2kcY \wedge Z + 2kaX \wedge Y.$$

. Structures de Lie-Poisson:

$$\begin{aligned} P(x,y,z,t) &= k(zt-xy)\widetilde{Y} \wedge \widetilde{Z} \\ &\quad +k(-1+\frac{1}{2}(x^2-y^2-z^2+t^2)\widetilde{Z} \wedge \widetilde{X} \\ &\quad +\frac{1}{2}k(x^2+y^2-z^2-t^2)\widetilde{X} \wedge \widetilde{Y}. \end{aligned}$$

. Coordonnées linéarisantes:
$(x-t, Argth\frac{y+z}{x+t}, y-z)$ est un système de coordonnées linéarisantes pour P, au voisinace de l'élément neutre.

3.4.3 **Troisième famille de solutions de Yang-Baxter.**

$$Q = X \wedge (Y + Z).$$

. Cocycle:

$$p(aX+bY+cZ) = 2(b-c)Y \wedge Z - 2aZ \wedge X + 2aX \wedge Y.$$

. Structures de Lie-Poisson:

$$\begin{aligned} P(x,y,z,t) &= 2zt\widetilde{Y} \wedge \widetilde{Z} + (t^2-z^2-1)\widetilde{Z} \wedge \widetilde{X} \\ &\quad +(1-z^2-t^2)\widetilde{X} \wedge \widetilde{Y}. \end{aligned}$$

. Linéarisation:
L'algèbre de Lie linéarisée en e associée à P est $g^* = > X^*, Y^*, Z^* <$ définie par

$$[Z^*, X^*] = -2X^*;$$
$$[Z^*, Y^*] = 2(Z^* - Y^*);$$
$$[X^*, Y^*] = 2X^*.$$

Le changement de base

$$X^{*'} = X^*;\ Y^{*'} = Y^* - Z^*;\ Z^{*'} = Z^*,$$

donne

$$\left[Z^{*'}, X^{*'}\right] = 2X^{*'};$$
$$\left[Z^{*'}, Y^{*'}\right] = 2Y^{*'};$$
$$\left[X^{*'}, Y^{*'}\right] = 0$$

Cette algèbre est "non degenérée" d'après la classification de Dufour $[Du]$. La structure de Poisson P est donc linéarisable au voisinage de l'unité, nous n'avons cependant pas de candidat pour un système de coordonnées linéarisantes.

IV. REFERENCES

[D] . Drinfeld, Quantum groups, in Proc. ICM, MSRI, Berkeley, 1986.
[Du] . J.P.Dufour, Linéarisation de certaines structures de Poisson, J. Differenial Geometry 32 1990.
[L] . J.H.Lu, Multiplicative and affine Poisson Structures on Lie groupe, B.S. (Beijing university, Poeple's Republic of China), 1983, CPhil (univrsity of California) 1987.
[L,W] . J.H.Lu, A.Weinstein, Poisson-Lie group, dressing transformations and Bruhat decompositions, J.Differential Geo,. (31), 1990.
[O] . C.Ohn, Groupe de Lie-Poisson, U.L.B, Octobre 1989.