African Journal Of Mathematical Physics Vol **4** No 1 (2007)65-96

Théorie des Cordes Twistorielles et Supergravité Conforme $\mathcal{N} = 4, D = 4$

L.B Drissi[1,2,3], H.Jehjouh[1,2], E.H Saidi[1,2,3]

1. *Lab/UFR-Physique des Hautes Energies, Faculté des Sciences de Rabat, Morocco.*
2. *Groupement National de Physique des Hautes Energies, GNPHE; Siege focal, Lab/UFR-HEP, Rabat.*
3. Virtual African Centre for Basic Science & Technology, Focal point, Lab/UFR-PHE, FSR.

lbdrissi@gmail.com, *jehjouh@gmail.com*

Abstract

Ce travail de synthèse traite la théorie des cordes twistorielle qui découle de la fusion entre la théorie des cordes et la géométrie twistorielle. Cette théorie admet deux versions : la corde ouverte twistorielle et le modèle B dans $\mathbb{CP}^{3|4}$. L'étude explicite des opérateurs vertex de ces deux alternatives tantôt en termes des twisteurs, tantôt en termes des états de l'espace $\mathbb{R}^{1,3}$ nous mène à deux spectres qui s'avèrent équivalents contenant également les états physiques de la supergravité conforme $\mathcal{N} = 4, D = 4$. Cette étude présente aussi les techniques de base de l'extension de la symétrie miroir des supervariétés de CY que nous appliquons à quelques supergéométries.

Mots clés: Géométrie twistorielle, Supervariété $\mathbb{CP}^{3|4}$, Modèle B, Corde ouverte twistorielle, Supergravité conforme.

I. INTRODUCTION

Pendant une longue période; les spineurs à deux composantes ont joué un rôle fondamental dans l'étude de la structure des variétés de l'espace-temps. En effet, un grand nombre des propriétés de l'espace-temps à 4 dimensions de signature $(+ - - -)$ découlait des spineurs. Par la suite, dans l'objectif de dériver tous les concepts de l'espace-temps; une nouvelle philosophie a vu le jour. Celle-ci prévoyait à introduire de nouveaux éléments plus primitifs que les spineurs de telle sorte que même les points de l'espace-temps soient des objets dérivés.

L'incapacité de l'algèbre spinorielle de réaliser cet objectif a donné naissance à son extension appelée algèbre twistorielle. Cette dernière est considérée plus primitive que l'espace-temps puisque le concept des twisteurs s'utilise directement soit pour construire ou bien pour reformuler plusieurs aspects physiques (parmi lesquels nous citons: le moment énergie, le moment angulaire, la quantification, la structure des particules élémentaires ainsi que leurs nombres quantiques internes, les fonctions d'ondes, les champs de l'espace-temps ...) sans faire recours aux point de l'espace-temps[1−6]. Par conséquent, plusieurs études se basant sur la théorie twistorielle se sont succédés dont les plus anciens[6−14] et les récents[15−42].

La splendeur des travaux récents se résume dans le fait qu'ils ont parfaitement réussi à combiner entre la richesse des théories des cordes et les structures mathématiques de la théorie twistorielle, redonnant ainsi un nouveau souffle au programme twistoriel qui est resté pour plus de trente années incapable d'accompagner les principaux développements en physique. Dés lors, cette fusion fut connue sous le non de "théorie des cordes twistorielles". Les versions les plus utilisées sont le modèle B dans le superespace twistoriel ainsi que la corde ouverte twistorielle. La première alternative a connu un succès remarquable après qu'elle fut introduite par Witten[16]. Cette nouveauté constitua l'événement principal qui a occupé les théoriciens ces trois dernières années.

Dans le contexte de la théorie des cordes, la construction de celle-ci nécessite l'invariance conforme qui est garantie par la condition de Ricci-plate de l'espace cible. Or, l'espace twistoriel $\mathbb{CP}^3$ est dépourvu de cette propriété. Afin de surmonter ce problème, l'espace twistoriel doit être une supervariété de Calabi-Yau en ajoutant des directions fermioniques d'où l'obtention de $\mathbb{CP}^{3|4}$. Par conséquent, l'une des idées majeurs de la théorie des cordes twistorielles repose sur l'union entre la géométrie twistorielle d'une part, et la géométrie de Calabi-Yau d'autres part dans la supervariété $\mathbb{CP}^{3|4}$. Cet espace est simultanément un espace supertwistoriel et une supervariété de Calabi-Yau[14]. Ainsi, il est estimé constitué le candidat adéquat pour être l'espace cible du modèle B topologique.
En s'inspirant de ce résultat, Witten a conjecturé que les contributions des D-instantons du modèle B dans le superespace twistoriel $\mathbb{CP}^{3|4}$, calculent les amplitudes de diffusion de la théorie de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ (pour plus de détail consulter[16]).
Un autre résultat prouvé dans[16] montre que les courbes de degré d dans l'espace twistoriel décrivent les amplitudes à $(d + 1)$ gluons d'hélicité négative.

Parallèlement à cette version,[20] a proposé une alternative exhibant la théorie des cordes ouvertes twistorielles. Celle-ci est fondée sur l'utilisation des variables twistorielles de la surface d'univers. Ce travail très rigoureux dans son ensemble a constitué une base solide pour plusieurs auteurs depuis son apparition; puisqu'un grand nombre de publications s'est consacré à employer la théorie twistorielle des cordes afin de déterminer les amplitudes de diffusion des théories de jauge ordinaires et supersymétriques.

Quoique[16−20] traitent deux versions différentes, celles-ci semblent être étroitement liées. En effet, selon[22] les opérateurs vertex de la corde ouverte twistorielle sont équivalents à ceux du modèle B dans $\mathbb{CP}^{3|4}$. Ainsi, quelque soit la théorie d'origine considérée, les résultats fournis seront identiques. Ce papier offre également un nouveau axe de recherche puisque à l'encontre des cordes ordinaires où seule la corde fermée produit la théorie de gravité, dans[22] c'est le secteur du singulet de jauge de la corde ouverte twistorielle qui fournit les états physiques semblables à ceux de la supergravité conforme $\mathcal{N} = 4$ à quatre dimensions. En se servant de la dualité entre la théorie de cordes et la théorie de supergravité, et en particulier les cordes dans l'espace Twistor, cette dualité est une spécification de l'espace de Twistor après utilisation de la correspondance de Penrose.

La quête concernant la théorie twistorielle des cordes continue de s'enrichir mais cette fois-ci avec un intérêt de base mathématique. A titre d'exemple, l'importance jouée par les supervariétés de CY en tant que des espaces cibles dans cette théorie exige une extension de la conjecture de la dualité miroir à la supergéométrie. Cette conjecture authentifie que les variétés de Calabi-Yau admettent des variétés duales constituant ainsi toutes les deux des paires de familles rapprochées par la symétrie miroir. Cependant, la classe nommée les variétés de Calabi-Yau rigides présente une obstruction. La résolution de cette énigme fut proposée dans[18], où Sethi conjecture que le miroir d'un certain type de ces variété n'est autre qu'une supervariété. Récemment le concept de la dualité-T pour les champs fermioniques[25] a captivé beaucoup d'attention attribuée à l'étude des miroirs des supervariétés de CY. Parmi les fructueux résultats apparues dans cette direction[28−42].

Dans l'objectif de mieux expliciter ces idées, nous avons jugé convenable de répartir ce papier en quatre sections majeures que nous traitons comme suit: Estimée fondamentale pour la compréhension des sections suivantes, la première section aborde des notions préliminaires concernant les spineurs afin d'introduire les twisteurs. En second lieu, nous présentons l'espace twistoriel aussi bien que les courbes algébriques. Enfin, nous complétons cette section par l'étude du superespace twistoriel. La deuxième section traite brièvement l'extension fermionique de la symétrie miroir des supervariétés de CY^{35-36} qui ne sont autres que les espaces cibles de la théorie des cordes twistorielle. Afin de mieux illustrer cette idée nous avons présenté quelques exemples de miroirs de SCY. La partie suivante est destinée tout d'abord à l'étude de la supergravité conforme $\mathcal{N}=4$ $D=4$ dans le superespace en déterminant son spectre linéaire. Ensuite, nous fixons l'intérêt sur la corde ouverte twistorielle ainsi que le modèle B dans le superespace twistoriel $\mathbb{CP}^{3|4}$, tout en analysant leur spectre et en interprétant les résultats obtenus dans notre espace-temps de Minkowski. Il découle alors une identification des champs de la corde twistorielle avec le spectre des états non massifs de la théorie de supergravité conforme. Finalement, nous terminons par une conclusion.

II. ESPACE (SUPER)TWISTORIEL

Dans cette section, nous évoquons les grandes lignes, concernant l'espace twistoriel et son extension supersymétrique ainsi que d'autres éléments qui leur sont liés comme les twisteurs et les courbes algébriques. En revanche, nous nous abstenons de présenter trop de détails à ce sujet.

A. Spineurs

Avant d'aborder l'espace twistoriel, il est indispensable de rappeler quelques notions de base concernant les spineurs. Pour la signature $(+---)$, le groupe de Lorentz complexifié à quatre dimensions $SO(3,1,\mathbb{C})$ est localement isomorphe à $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ dont les représentations de dimensions finies s'écrivent (p,q), où p et q sont des nombres entiers ou demi-entiers.

Généralement, le spineur de chiralité positive se transforme comme $(\frac{1}{2},0)$ et il est noté λ_a, $a=1,2$, tandis que $\tilde{\lambda}_{\dot{a}}$, $\dot{a}=1,2$ correspond au spineur qui se transforme comme $(0,\frac{1}{2})$ et qui porte une chiralité négative.

Pour le spineur de type $(\frac{1}{2},0)$, les indices sont levés et baissés respectivement par l'intermédiaire ∞ des tenseurs antisymétriques ϵ_{ab} et ϵ^{ab} obéissant $\epsilon_{12}=1$ et $\epsilon_{ac}\epsilon^{cb}=\delta^a{}_b$ de sorte que

$$\lambda^a=\epsilon^{ab}\lambda_b \quad \text{et} \quad \lambda_a=\epsilon_{ab}\lambda^b.$$

Ainsi, en considérant deux spineurs de chiralités positives notés λ_1 et λ_2; l'invariant de Lorentz défini par

$$\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle=\epsilon_{ab}\lambda_1^a\ \lambda_2^b$$

vérifie la relation: $\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle=-\langle\lambda_2,\lambda_1\rangle$. Par conséquent, ce produit est antisymétrique en ses deux variables. En particulier, $\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle=0$ implique que λ_1 est égale à λ_2 à un scalaire prés $\lambda_1^a=c\lambda_2^a$.

De manière similaire, le tenseur antisymétrique $\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ et son inverse $\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ abaisse et soulève respectivement les indices de type $(0,\frac{1}{2})$, dans ce cas, l'invariant est :

$$[\tilde{\lambda},\tilde{\lambda}']=-[\tilde{\lambda}',\tilde{\lambda}]=\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\tilde{\lambda}^{\dot{a}}\tilde{\lambda}'^{\dot{b}}.$$

où $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\lambda}'$sont tout les deux des spineurs de chiralités négatives et $\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{\dot{b}\dot{c}}=\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{c}}$.

Par ailleurs, étant donné que $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ est la représentation vectorielle de $SO(3,1,\mathbb{C})$, alors le vecteur moment p_μ, $\mu=0,\cdots,3$ est décrit par un bi-spineur $p_{a\dot{a}}$ d'indices spinoriels pointé $\dot{a}$ et non pointé a pour chaque chiralité. Le passage de p_μ à $p_{a\dot{a}}$ se fait en utilisant la partie chirale des matrices de Dirac[17] et[16].

En effet, pour une signature $(+---)$, les matrices de Dirac s'écrivent

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix},$$

où $\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$ tel que $\vec{\sigma}$ ne sont autre que les trois matrices de Pauli 2×2.
En fait, les blocs non nuls de γ^μ forment respectivement deux matrices 2×2 qui s'écrivent $\sigma^\mu_{a\dot{a}}$ $(\bar{\sigma}^{\mu a\dot{a}})$.
La matrice $\sigma^\mu_{a\dot{a}}$ assure la transformation des spineurs d'une chiralité vers une autre.
A l'instar de ce qui prélude, p_μ est relié à $p_{a\dot{a}}$ via la formule suivante:

$$\begin{aligned} p_{a\dot{a}} &= \sigma^\mu_{a\dot{a}} p_\mu \\ &= p_0 + \vec{\sigma}.\vec{p} \end{aligned}$$

tel que p_0 et $\vec{p}$ sont les parties temporelle et spatiale respectivement de p^μ.
En outre, puisque $p_{a\dot{a}}$ est une matrice 2×2 de rang $r \leq 2$, alors son expression en termes des spineurs λ, μ et $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ est de la forme:

$$p_{a\dot{a}} = \lambda_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}} + \mu_a \tilde{\mu}_{\dot{a}} \tag{2.1}$$

Il s'ensuit alors l'identification

$$p_\mu p^\mu = det(p_{a\dot{a}}) \tag{2.2}$$

qui nous informe que le vecteur p_μ est de genre-lumière si et seulement si le déterminant de la matrice $p_{a\dot{a}}$ correspondante est nul. Dans ce cas, l'équation (2.1) se réduit à

$$p_{a\dot{a}} = \lambda_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \tag{2.3}$$

de sorte que $p_{a\dot{a}}$ est réel si $\tilde{\lambda}^{\dot{a}} = \pm \bar{\lambda}^{\dot{a}}$ (où $\bar{\lambda}$ est le complexe conjugué de λ). Le signe détermine si p^μ est d'énergie positive ou bien négative.
La formule (2.2) s'écrit également sous la forme

$$p_\mu p^\mu = \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{a\dot{a}} p_{b\dot{b}}$$

d'où la possibilité de la généraliser à

$$p.q = \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{a\dot{a}} q_{b\dot{b}} \tag{2.4}$$

tel que p et q sont deux vecteurs quelconques. Par surcroît, si p et q sont de genre-lumière, autrement dit ils s'écrivent $p_{a\dot{a}} = \lambda_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}}$, $q_{b\dot{b}} = \mu_b \tilde{\mu}_{\dot{b}}$, .alors (2.4) s'exprime en termes des invariants de Lorentz de la façon suivante:

$$p.q = \langle \lambda, \mu \rangle [\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}].$$

Dans ce qui suit, ces résultats sont exhibés brièvement pour les autres signatures de l'espace. En ce qui concerne la signature $(++--)$; le groupe de Lorentz $SO(2,2)$ -sans faire recours à une complexification- est localement isomorphe à $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$. De ce fait, les spineurs λ_a et $\tilde{\lambda}_{\dot{a}}$ sont des objets à deux composantes, réels, indépendants.

Quant à la signature euclidienne $(++++)$ où le groupe de Lorentz est localement isomorphe à $SU(2) \times SU(2)$; les représentations des spineurs sont pseudo-réelles.

B. Twisteurs

Dans cette partie, nous introduisons les twisteurs de la même manière étalée par Penrose dans[2,4,?]. En dynamique relativiste, tout système fini est caractérisé par:

- un moment total P^μ représenté par un 4-vecteur,

- un moment angulaire total $M^{\mu\nu}$ qui dépend de l'origine.

Ce système équivalent à une particule avec ces spins intrinsèques peut être exprimé en termes de spin de vecteurs de Pauli-Lubanski

$$S_\mu := -\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}.$$

Dans le cas fondamental où la masse est au repos ($P^\nu P_\nu = 0$); Le vecteur Pauli-Lubanski doit être un multiple du 4-moment, tel que

$$M^{\rho\sigma}P_\sigma \propto P^\rho \Leftrightarrow S_\mu = sP_\mu \tag{2.5}$$

pour des hélicités s constantes. Quand le module du spin $|s|$ est non nul; alors la particule est non localisée. Le vecteur P^μ correspond à un spineur $\pi_{\dot{a}}$ et prend la forme :

$$P_\mu \sim \bar{\pi}_a\pi_{\dot{a}} \tag{2.6}$$

tandis que $M^{\mu\nu}$ est représenté par

$$M^{\mu\nu} \sim \mu^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} + \epsilon^{ab}\bar{\mu}^{\dot{a}\dot{b}} \tag{2.7}$$

tel que μ^{ab} est un spineur symétrique. Par conséquent; l'équation $S^\mu = sP^\mu$ s'écrit

$$\begin{aligned} S_{d\dot{d}} &= s\bar{\pi}_d\pi_{\dot{d}} \\ &= -i\bar{\pi}_d\pi^{\dot{a}}\bar{\mu}_{\dot{a}\dot{d}} + i\bar{\pi}^a\mu_{ad}\pi_{\dot{d}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

qui donne $\mu_{ab}\bar{\pi}^a\bar{\pi}^b$ d'où $\mu_{ab} = i\omega_{(a}\bar{\pi}_{b)}$ pour certains spineurs ω^a . De plus, puisque tout spineur symétrique à 2 indices est le produit extérieur de 2 spineurs, alors nous déduisons que l'un des facteurs de μ_{ab} doit être $\bar{\pi}_a$. Ainsi,

$$M^{a\dot{a}b\dot{b}} = i\bar{\pi}^{(a}\omega^{b)}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} - i\pi^{(\dot{a}}\bar{\omega}^{\dot{b})}\epsilon^{ab}. \tag{2.9}$$

Finalement, la paire $(P_\mu, M^{\mu\nu})$ se caractérise par les deux spineurs $(\omega^a, \pi_{\dot{a}})$. Cette paire est une représentation du twisteur noté Z^α.

La transformation d'échelle conforme transforme ω^a et $\pi_{\dot{a}}$ alors qu'elle n'affecte pas Z^α. Pour cette raison, Penrose insiste sur l'idée que cette paire ne définit pas le twisteur mais elle le représente seulement[2]. Il s'ensuit alors que les composantes du twisteur s'expriment en termes de celles spinorielles comme suit

$$Z = (\omega^1, \omega^2, \pi_{\dot{1}}, \pi_{\dot{2}})$$

cependant, le twisteur conjugué est représenté par

$$\bar{Z} = (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \bar{\omega}^{\dot{1}}, \bar{\omega}^{\dot{2}}).$$

En conclusion, le concept du twisteur Z^α, représenté par la paire des spineurs $(\omega^a, \pi_{\dot{a}})$, définit le moment et le moment angulaire d'une particule non massive par le biais de (2.6) et (2.9).

C. Espace twistoriel

Le point de départ est l'équation

$$\nabla_{\dot{a}}^{(a}\omega^{b)} = 0 \tag{2.10}$$

que Penrose nome l'équation twistorielle. Dans l'espace de Minkowski $\mathcal{M}$, cette équation possède 4 solutions linéairement indépendantes[2].

Les solutions de l'équation (2.10) -comme c'est le cas pour toutes les équations différentielles linéaires (complexes)- constituent un espace vectoriel dont l'addition ainsi que la multiplication par un scalaire de ces solutions sont définies de la manière habituelle[5]. Comme nous le constaterons dans (2.11).

Dans notre cas ces solutions ω^a forment un espace vectoriel de 4 dimensions complexes appelé l'espace twistoriel $\mathbb{T}^\alpha$ et par conséquent elles ont 8 degrés de liberté réels. Il s'ensuit alors que l'espace twistoriel est un espace de 8 dimensions réelles; autrement 4 dimensions complexes.
L'élément Z^α déjà évoqué est un twisteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, et l'espace $\mathbb{T}^\alpha$ auquel il est associé n'est autre qu'une somme directe des espaces des spineurs de types ω^a et $\pi_{\dot{a}}$. Dans cet espace les twisteurs sont considérés comme une sorte de racine carré du moment et moment angulaire par analogie avec les spineurs qui présentent la racine carré des vecteurs.

Dans cet espace twistoriel, les twisteurs satisfont la structure linéaire suivante:

$$\begin{aligned} \lambda Z^\alpha &\longleftrightarrow (\lambda\omega^a, \lambda\pi_{\dot{a}}) \\ Z_1^\alpha + Z_2^\alpha &\longleftrightarrow (\omega_1^a + \omega_2^a, \pi_{1\dot{a}} + \pi_{2\dot{a}}); \end{aligned} \tag{2.11}$$

d'où la nécessité de connaître le groupe des transformations préservant ces structures.
D'autre part, l'espace des twisteurs $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ noté $\mathbb{T}_\alpha$ est l'espace dual qui est la somme directe des spineurs de types ω^a et $\pi_{\dot{a}}$. Plus encore, ces twisteurs s'identifient aux complexes conjugués des twisteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, et vice versa.
En général, à partir des twisteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; d'autres twisteurs ayant une valence arbitraire $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ se forment selon les règles standards de construction des systèmes tensoriels, d'où les différents espaces $\mathbb{T}_\alpha$, $\mathbb{T}_\beta^{\gamma\delta}\dots$
En effet considérons, à titre d'exemple, le produit extérieur $X^\alpha Z^\beta$ des deux twisteurs $Z^\beta = (\omega^b, \pi_{\dot{b}})$ et $X^\alpha = (\xi^a, \eta_{\dot{a}})$, a pour composantes lles éléments $\xi^a\omega^b$, $\xi^a\pi_{\dot{b}}$, $\eta_{\dot{a}}\omega^b$ et $\eta_{\dot{a}}\pi_{\dot{b}}$.
Ce twisteur résultant est de valence $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, et il est noté $E^{\alpha\beta}$. Ainsi, pour raison de simplicité ses constituants s'écrivent E^{ab}, $E_{\dot{b}}^a$, $E_{\dot{a}}^b$, $E_{\dot{a}\dot{b}}$. Ces éléments sont appelés les parties spinorielles de $E^{\alpha\beta}$ et ils se rassemblent sous la forme

$$E^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} E^{ab} & E^a{}_{\dot{b}} \\ E_{\dot{a}}{}^b & E_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}$$

où l'ordre des indices spinoriels doit être respecté.
En poursuivant cette même procédure, les formes des twisteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ de l'espace $\mathbb{T}^\alpha{}_\beta$ ainsi que $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ de l'espace $\mathbb{T}_{\alpha\beta}$, sont donnés par

$$Q^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} E^a{}_b & E^{a\dot{b}} \\ E^{\dot{a}b} & E^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} R_{ab} & R_a{}^{\dot{b}} \\ R^{\dot{a}}{}_b & R^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}.$$

De façon générale, le twisteur de valence $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ possède 2^{p+q} parties spinorielles. De plus; son conjugué s'obtient simplement en conjuguant chacune des parties spinorielles tout en les plaçant dans les positions

[0]la dérivé covariante $\nabla_\mu \sim \nabla_{a\dot{a}}$

correctes.

Une autre caractéristique importante est octroyée par le produit scalaire d'un twisteur quelconque $Z^\alpha \longleftrightarrow (\omega^a, \pi_{\dot{a}})$ et son conjugué $\bar{Z}_\alpha \longleftrightarrow (\bar{\pi}_a, \bar{\omega}^{\dot{a}})$[10]. Ce produit définit la forme hermitique

$$Z^\alpha \bar{Z}_\alpha = \omega^a \bar{\pi}_a + \pi_{\dot{a}} \bar{\omega}^{\dot{a}}$$

qui se coïncide exactement avec l'hélicité s de la particule associée à Z^α tel que

$$s := \frac{1}{2} Z^\alpha \bar{Z}_\alpha.$$

Il est évident que cette forme est réelle de signature $(++--)$ quoiqu'elle peut être positive ou négative selon l'hélicité s. Le twisteur Z^α est dit alors

- nul si $s = 0$
- droitier si $s > 0$
- gaucher si $s < 0$.

Dans ce contexte, Z^α représente une ligne d'univers nulle pour $s = 0$. Cependant il représente une particule ayant un spin intrinsèque quand $s \neq 0$. Il s'ensuit alors que l'espace twistoriel $\mathbb{T}^\alpha$ noté $\mathbb{T}$ tout court, se compose de trois pièces $\mathbb{T}^0 = N$, $\mathbb{T}^+$ et $\mathbb{T}^-$ qui correspondent respectivement aux trois cas de twisteurs donné ci-dessus. De même, l'espace twistoriel dual $\mathbb{T}^* = \mathbb{T}_\alpha$ se constitue de $\mathbb{T}_0$, $\mathbb{T}_+$ et $\mathbb{T}_-$.

Revenons maintenant au groupe twistoriel qui préserve la forme hermitique ainsi que les structures linéaires. Du fait que la signature associée à la forme hermitique $Z^\alpha \bar{Z}_\alpha$ est $(++--)$ alors le groupe est $U(2,2)$. Or en tenant compte la signification géométrique de la phase du twisteur; le groupe s'identifie à $SU(2,2)$[10].

D. Interprétation géométrique

Selon ce qui présage; un twisteur qui vérifie la formule $2s = Z^\alpha \bar{Z}_\alpha = 0$ représente une ligne droite nulle; autrement dit une ligne d'univers de particule ayant un spin zéro. Or, si $s \neq 0$, la ligne est dite ≪complexe≫. De façon plus claire; lorsque $s = 0$; Z^α et ρZ^α $(\rho \neq 0)$ représentent la même ligne ce qui mène à l'interprétation géométrique suivante: *l'espace twistoriel est l'espace N des classes d'équivalence $\{\rho Z^\alpha\}$ pour $s = 0$ et $Z \neq 0$.* Ainsi, il s'écrit

$$\mathbf{N} = \left\{ \{\rho \mathbf{Z}^\alpha;\ \rho \neq \mathbf{0};\ \rho \in \mathbb{C}\} : \mathbf{Z}^\alpha \bar{\mathbf{Z}}_\alpha = \mathbf{0}; \mathbf{Z}^\alpha \neq \mathbf{0} \right\}$$

et il représente l'ensemble des lignes nulles dans l'espace de Minkowski $\mathcal{M}$. D'autre part, l'espace $\mathbf{C}$ des classes d'équivalence des twisteurs; définit comme $\mathbf{N}$ mais privé de la condition $s = 0$, est un espace projectif complexe $\mathbb{CP}^3$ de 3 dimensions complexes (ou 6 dimensions réelles) tel que ses points complexes sont représentés par des structures réelles dans $\mathcal{M}$. Par ailleurs, sachant qu'un point dans l'espace $\mathcal{M}$ est défini par l'intersection des lignes nulles, il sera intéressant, d'après[11], de trouver son correspondant dans l'espace $\mathbf{C}$.

Pour cette raison, il faut considérer 2 lignes décrites par les twisteurs $Z^\alpha \longleftrightarrow (\omega^a, \pi_{\dot{a}})$ et $Y^\alpha \longleftrightarrow (\xi^a, \eta_{\dot{a}})$. Celles-ci se rencontrent dans le cas où les équations

$$\omega^a = i p^{a\dot{a}} \pi_{\dot{a}} \quad \text{et} \qquad \xi^a = i p^{a\dot{a}} \eta_{\dot{a}} \tag{2.12}$$

admettent une solution commune[11]. De façon plus formelle, (2.12) se traduit par :

$$p^{a\dot{a}} = \frac{-i}{\pi_{\dot{b}} \eta^b} (\omega^a \eta^{\dot{a}} - \xi^a \pi^{\dot{a}}).$$

Si les lignes s'intersectionnent, alors p^μ est réel d'où

$$\bar{\eta}_a \omega^a = i\bar{\eta}_a p^{a\dot{a}} \pi_{\dot{a}} = -\bar{\xi}^{\dot{a}} \pi_{\dot{a}}$$

qui se réecrit comme $Z^\alpha \bar{Y}_\alpha = 0$. Il s'ensuit alors que les conditions nécessaires pour que les deux twisteurs Y^α et Z^α représentent des lignes réelles intersections sont:

$$Y^\alpha \bar{Y}_\alpha = 0, \quad Z^\alpha \bar{Z}_\alpha = 0, \quad Z^\alpha \bar{Y}_\alpha = 0$$

Ces conditions sont satisfaites en remplaçant Y^α(ou Z^α) par:

$$X^\alpha = \rho Z^\alpha + \Gamma Y^\alpha$$

pour ρ et Γ des nombres complexes quelconques. Ainsi la ligne X intersection chacun des Y et Z. Plus encore, elle est associée au point P dont p^μ est son vecteur moment. Par conséquent, P est représenté dans $\mathbf{N}$ par l'ensemble linéaire $\rho Z^\alpha + \Gamma Y^\alpha$; autrement par la ligne complexe P de dimensions 2 réelles et qui d'une part possède la topologie de S^2 et d'une autre part joint les points Y et Z. Dès lors, ce point P se réalise par un twisteur à deux indices (càd de valence $\left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right]$) noté $P^{\alpha\beta}$ tel que

$$\begin{aligned} P^{\alpha\beta} &= Z^\alpha Y^\beta - Y^\alpha Z^\beta \\ &= \pi_{\dot{d}} \eta^{\dot{d}} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \varepsilon^{ab} p_{c\dot{c}} p^{c\dot{c}} & ip^a{}_{\dot{b}} \\ -ip_{\dot{a}}{}^b & \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $p^\mu \sim p^{a\dot{a}}$ est le vecteur position du point P. De cette analyse découle le fait que ***les points de $\mathcal{M}$ correspondent aux twisteurs à 2 indices.*** Notons que le twisteur dual défini par $P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} P^{\rho\sigma}$ donne la description géométrique duale de la même ligne.

De façon générale une ligne (projective complexe) dans l'espace twistoriel (projectif) $\mathbb{T}(\mathbf{C})$ correspond à un point dans l'espace complexifié de $\mathcal{M}$ appelé $\mathbb{C}\mathcal{M}$$\cdot$ De plus une ligne dans $\mathbf{N}$ correspond à un point réel dans $\mathcal{M}$, cependant un point dans $\mathcal{M}$ correspond à une ligne nulle dans $\mathbf{N}$.
Cette correspondance géométrique se résume comme suit

$$\begin{array}{ccc} \text{point dans } \mathbb{T} & \longleftrightarrow & \mathbb{CP}^2 \subset \mathcal{M} \\ \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{T} & \longleftrightarrow & \text{point dans } \mathcal{M} \end{array}$$

Ainsi il est possible de reconstruire l'espace $\mathbb{C}\mathcal{M}$ à partir de l'espace twistoriel $\mathbb{T}$. Le lien profond entre les deux espaces se traduit par la correspondance twistorielle de Penrose[15]. Cette dernière décrit les espaces twistoriels comme étant des variétés complexes de dimension 3 associées aux géométries Riemanniennes spéciale conforme sur des variétés à 4 dimensions.

L'exemple le plus simple qui concrétise cette correspondance est la variété S^4 dont $\mathbb{CP}^3$ est l'espace twistoriel qui lui est associée via la transformation naturelle de Hopf. En réalisant S^4 comme une ligne projective quaternionique $\mathbb{HP}^1$, la correspondance s'écrit:

$$\mathbb{CP}^3 = \frac{\mathbb{C}^4 - \{0\}}{\mathbb{C}^*} \quad \longrightarrow \quad S^4 = \mathbb{HP}^1 = \frac{\mathbb{H}^2 - \{0\}}{\mathbb{H}^*}$$

E. Courbes algébriques

Les courbes algébriques jouent un rôle important dans la construction des amplitudes de diffusion de la théorie de Yang-Mills. Cette partie aborde les lignes droites holomorphes connues aussi comme les courbes de degré 1 dans l'espace twistoriel.

En général, une courbe est dite algébrique lorsqu'elle possède une équation cartésienne polynomiale à coefficients réels. Dans le cas où elle est non algébrique, elle est dite transcendante. Le degré (ou l'ordre) d d'une courbe algébrique plane d'équation $P(x, y) = 0$ n'est autre que le degré du polynôme

P. Autrement dit, c'est le nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, de la courbe avec une droite quelconque dans le plan projectif complexe. D'autre part, le genre (génus) d'une courbe algébrique de degré n est l'entier $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ diminué des ordres de multiplicité des points singuliers de la courbe dans le plan projectif complexe.

En adoptant les idées de[16], une courbe algébrique Σ dans l'espace $\mathbb{RP}^3$ est définie comme étant un ensemble zéro d'une collection d'équations polynomiales dont les coefficients des coordonnées homogènes Z^I de $\mathbb{RP}^3$ sont réels. Le degré et le genre de ces courbes sont définis en complexifiant Z^I, suite auquel Σ devient une surface de Riemann dans $\mathbb{CP}^3$, dont le degré et le genre sont définis de la manière habituelle déjà évoquée.

D'autre part, à partir de deux polynômes homogènes $F(Z^I)$ de degré d_1 et $G(Z^I)$ de degré d_2 s'obtient le type le plus simple des courbes algébriques et qui n'est autre que l'intersection complète réalisée quand F et G sont tout les deux nuls. Le degré d d'une telle courbe est le produit des deux degrés

$$d = d_1.d_2.$$

Parmi ce type de courbes, nous citons les courbes de degré 1 et celles de degré 2 obtenues respectivement via $(d_1, d_2) = (1, 1)$ et $(1, 2)$. Pour rendre ces idées plus concrètes, considérons l'espace $\mathbb{CP}^3$ de dimension 3 complexes. Afin d'obtenir une ligne dans l'espace twistoriel, il s'avère évident d'imposer deux conditions complexes. Par conséquent, une ligne dans l'espace twistoriel s'établit comme solution de l'ensemble des équations:

$$A_I Z^I = 0, \qquad B_I Z^I = 0 \tag{2.13}$$

où A_I, B_I sont des twisteurs constants qui indiquent le placement de la ligne dans $\mathbb{CP}^3$.
Les équations (2.13) se réécrivent sous la forme

$$a^i_a \lambda^a + b^i_{\dot{a}} \mu^{\dot{a}} = 0, \quad i = 1, 2 \tag{2.14}$$

tel que a et b sont des matrices 2×2 dont les éléments vérifient

$$A_I = (a^1_a, b^1_{\dot{a}}) \quad \text{et} \quad B_I = (a^2_a, b^2_{\dot{a}})$$

de telle manière que *det* a et *det* b sont tout les deux non nuls ou au moins l'un d'eux est nul. De (2.13), il parait suffisant qu'au moins l'un des deux déterminants soit non nul afin de réduire l'espace à une ligne. Dans le cas où *det* $b \neq 0$; alors b est inversible et la solution de (2.14) est donnée par

$$\begin{aligned} \mu^{\dot{a}} &= -(b^{-1}a)_{a\dot{a}} \lambda^a \\ &\equiv x_{\dot{a}a} \lambda^a. \end{aligned}$$

Cette même procédure s'effectue pour le cas *det* $a \neq 0$. En conclusion, pour chaque $x_{a\dot{a}}$ réel, la paire des équations

$$\mu_{\dot{a}} + x_{a\dot{a}} \lambda^a = 0; \quad \dot{a} = 1, 2 \tag{2.15}$$

définit une courbe algébrique réelle A dans $\mathbb{RP}^3$; ou bien dans $\mathbb{CP}^3$ si les variables sont complexifiées. Cette courbe est une intersection complète puisqu'elle parvient d'une paire de polynômes homogènes linéaires chacun de degré 1 (càd: $d_1 = d_2 = 1$). De plus, le genre de A est nul.

Par ailleurs, les équations (2.15) se résoudrent quand $\mu_{\dot{a}}$ est une fonction de λ^a. Ainsi, les λ^a servent de coordonnées homogènes pour A qui devient alors une copie de $\mathbb{RP}^1$ ou $\mathbb{CP}^1$ selon si les variables sont réelles ou complexes, tandis que $x_{a\dot{a}}$ déterminent le placement et l'orientation de la ligne dans l'espace twistoriel. Ainsi, les $x_{a\dot{a}}$ forment les modules de la ligne.

Dans la version réelle de l'espace twistoriel qui est associée à la signature $(++--)$; cette courbe se décrit par une ligne droite. En effet; en définissant dans $\mathbb{RP}^3$ les coordonnées affines suivantes:

$$x = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad y = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad z = \frac{\mu_2}{\lambda_2};$$

qui paramétrisent une copie de $\mathbb{R}^3$, il s'ensuit que A représente simplement une ligne droite dans $\mathbb{R}^3$.

F. Extension supersymétrique de l'espace twistoriel

L'étude nte est consacrée au cas purement bosonique. Or noté intérêt concerne les théories supersymétriques dans l'espace twistoriel d'où la nécessité d'effectuer une extension de ce dernier baptisée l'espace supertwistoriel. Pour cette raison, il faut introduit tout d'abord la notion de supervariété.

Le mot supervariété a été utilisé dans la littérature avec différentes expressions. Or c'est la définition de Roger-De-Witt qui nous importe dans notre analyse. Dans ce cadre, une supervariété est définie comme étant une extension naturelle, dans $\mathbb{R}^{m|n}$ ou $\mathbb{C}^{m|n}$, de la définition usuelle des variétés ordinaires.

En général, une supervariété complexe ou réelle de dimension $(m|n)$ (ou de superdimension $(m-n)$) se constitue de deux parties :

(i) Une variété complexe ordinaire X de dimension m paramétrée par une partie purement bosonique appelée ainsi variété bosonique ou corps dans le langage mathématique.

(ii) Une classe des fonctions S sur X localement isomorphes aux fonctions holomorphes à valeurs dans l'algèbre de Grassmann tel que

$$S = \mathcal{O}(\oplus_{j=0}{}^{k}\Lambda^{j}E^{*})$$

où E est un fibré vectoriel holomorphe de rang k appelé le fibré tangent fermionique dont E^{*} est son dual. Le fibré en ligne Berezinien B de ces supervariétés est définie par

$$B = L \otimes \Lambda^{k}E = \mathcal{O}(m-n-1).$$

Elle n'est autre qu'une généralisation du fibré en ligne canonique $L = \Lambda^{n,0}$ de la variété X à la simple différence que cette généralisation tient compte des coordonnées fermioniques. D'après[15], les directions fermioniques contribuent avec un signe opposé à celui des contributions des directions bosoniques.

L'exemple le plus important des supervariétés[18] dans $\mathbb{C}^{m|n}$ est l'espace superprojectif $\mathbb{CP}^{m|n}$ obtenu par:

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{CP}^{m} && \text{à } m+1 \text{ coordonnées bosoniques} \\ E &= \underbrace{\mathcal{O}(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(1)}_{n} && \text{à } n \text{ coord fermioniques} \end{aligned}$$

Les coordonnées homogènes de $\mathbb{CP}^{m|n}$ sont données par

$$(z^{1}, \ldots, z^{m+1}|\eta^{1}, \ldots, \eta^{n})$$

où $z^{\alpha} \to \lambda z^{\alpha}$ et $\eta^{\alpha} \to \lambda\eta^{\alpha}$.
Dans ce cas, la ligne fibrée Berezinienne correspondante est $B = \mathcal{O}(n-(m+1))$.

Un autre exemple très intéressant[18] est le superespace $W\mathbb{CP}(k_{1}, \cdots, k_{n+1}|l_{1}, \cdots l_{n})$ qui est vu comme une extension évidente du cas précédent avec $z^{\alpha} \to \lambda^{k_{\alpha}} z^{\alpha}$ et $\eta^{\alpha} \to \lambda^{l_{\alpha}}\eta^{\alpha}$. Dans le contexte du modèle B de la théorie des cordes topologiques qui est l'objet d'intérêt de ce papier, l'espace twistoriel doit être une supervariété de Calabi-Yau afin que la théorie possède des anomalies libres, d'où l'exigence d'avoir une forme volume globale holomorphe et non nulle[16]. Autrement dit, selon[15], une supervariété complexe est une super Calabi-Yau si sa ligne fibrée Berezinienne est holomorphe triviale. Or, il est clair que le fibré ligne de l'espace twistoriel $\mathbb{CP}^{3}$ est non triviale puisque $K = \mathcal{O}(-4)$!. Afin d'y remédier à ce problème, Witten a inséré dans l'espace $\mathbb{CP}^{3}$, un fibré vectoriel complexe fermionique de rang 4

$$E = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \tag{2.16}$$

L'espace résultant, nommé le superespace twistoriel, n'est autre que le $\mathbb{CP}^{3|4}$ qui obéit la condition de super Calabi-Yau du fait que

$$B = K \otimes \Lambda^{4}E \tag{2.17}$$

avec $\Lambda^4 E = \mathcal{O}(4)$. Etant donné l'attention portée aux espaces supertwistoriels; il s'avère nécessaire de présenter brièvement une extension supersymétrique des résultats traités dans les parties précédentes. Tout d'abord, selon la correspondance de Penrose, $\mathbb{CP}^{3|4}$ est associé à la version supersymétrique de S^4. D'autre part et de manière analogue au cas bosonique, pour tout x et θ; les équations

$$\begin{aligned} \mu_{\dot a} + x_{a\dot a}\lambda^a = 0; &\quad \dot a = 1,2 \\ \psi^A + \theta_a^A \lambda^a = 0; &\quad A = 1,\dots,4 \end{aligned}$$

déterminent une courbe dans le superespace twistoriel $\mathbb{CP}^{3|4}$. Ces équations admettent une solution pour μ et ψ s'écrivant en termes de λ . Ainsi, cette courbe a pour coordonnées homogènes les λ^a et représente une copie de $\mathbb{CP}^1$. De plus, elle est de degré 1 et ses modules bosonique et fermionique sont x et θ. Dans la version réelle de l'espace supertwistoriel; et plus particulièrement pour les coordonnées affines; cette courbe est une ligne droite.

En se basant sur cette construction, les courbes de degré d quelconque sont données par

$$\begin{aligned} \mu^{\dot{\mathbf{a}}} &= \sum \mathbf{x}^{\dot{\mathbf{a}}}_{\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_d}} \lambda^{\mathbf{a_1}} \cdots \lambda^{\mathbf{a_d}} \\ \psi^{\mathbf{A}} &= \sum \theta^{\mathbf{A}}_{\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_d}} \lambda^{\mathbf{a_1}} \cdots \lambda^{\mathbf{a_d}} \end{aligned}$$

où les coefficients $\mathbf{x}^{\dot{\mathbf{a}}}_{\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_d}}$ et $\theta^{\mathbf{A}}_{\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_d}}$ constituent les modules de la courbe.

A noter que chacun des indices a prend les valeurs 1 et 2. De plus, le fait que les coefficients sont symétriques en $a_1,\dots,a_d$ fournit $4(d+1)$ coefficients bosoniques et fermioniques. D'autre part, l'identification $\mu \to \xi\mu$ et $\psi \to \xi\psi$ tel que $\xi \in \mathbb{C} - \{0\}$ qui implique $\mathbf{x} \to \xi\mathbf{x}$ et $\theta \to \xi\theta$, nous apprend que l'espace des modules de la courbe n'est autre que $\mathbb{CP}^{4d+3|4d+4}$.

Le dernier résultat à citer concerne la correspondance géométrique supertwistorielle ($\mathcal{N}$-extension supersymétrique de l'espace twistorielle) qui est donnée par[19]

$$\begin{aligned} \text{point dans } \mathbb{P}^{3|\mathcal{N}} &\longleftrightarrow \mathbb{CP}^{2|N} \subset \mathcal{M}^{4|2\mathcal{N}} \\ \mathbb{CP}^{1|0} \text{ dans } \mathbb{P}^{3|\mathcal{N}} &\longleftrightarrow \text{point dans } \mathcal{M}^{4|2\mathcal{N}}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

III. SUPER VARIÉTÉS DE CY ET LA DUALITÉ-T

L'intérêt attribué à la supervariété $\mathbb{CP}^{3|4}$ est dû au fait que cet espace est simultanément un espace supertwistoriel et une supervariété de Calabi-Yau[14]. Or; ces supervariétes fournissent une arène intéressante pour l'étude des cordes topologiques puisqu'elles sont considérées comme l'espace cible du modèle-B. Une conjecture remarquable qui concrétise cette idée est la dualité entre le modèle-A topologique sur $\mathbb{CP}^{3|4}$ et le modèle-B topologique sur un quadrique à l'intérieur du superespace ambi-twisteur $\mathbb{CP}^{3|3} \times \mathbb{CP}^{3|3}$[28]. Dans cette conjecture, l'ingrédient crucial se résume dans le terme "symétrie miroir".

A. Dualité-T et Coordonnées fermioniques

En se basant sur l'analyse effectuée dans[25] et des résultats de[16,28,23], cette partie vise à présenter les techniques qui permettent d'obtenir le miroir des supervariétés de Calabi-Yau en tant que théories de Landau-Ginzburg; par le biais du concept de la dualité-T pour les champs fermioniques.

Inspirés par l'étude du cas bosonique étalée dans[26,27,29], la même stratégie est suivie dans[25] où la présentation s'effectue en deux étapes. La première consiste à reprendre la même stratégie que celle du cas bosonique en remplaçant le champ chiral Φ dont le dual est un champ chiral twisté Y défini par la condition

$$|\Phi|^2 = ReY,$$

par un champ chiral Θ dont la composante supérieure est fermionique et qui satisfait

$$\Theta\Theta^* = -ReX$$

pour un multiplet chiral twisté noté X. Le dual de la phase provenant de la rotation de Θ selon

$$\Theta \longrightarrow \Theta \exp(iw)$$

où w est bosonique, est donné par un angle bosonique qui peut être assimilé à la partie imaginaire de X.

Cependant, la deuxième étape étudie le superpotentiel effectif pour lechamp Θ conformément à la méthode exhibée dans[30]. Par une simple extension du cas bosonique le superpotentiel s'écrit:

$$W(\Sigma, X) = -Q\Sigma X + exp(-X).$$

où Σ est le superchamp chiral twisté du multiplet vectoriel $U(1)$, $\mathcal{N} = 2$ couplé au champ chiral Φ.

Il faut noter que cette théorie doit avoir une charge centrale $\widehat{c} = -1$, cependant la dimension nette du champ bosonique chiral twisté X est $+1$. Pour compenser cette ambiguité, il faut joindre à la théorie deux champs fermioniques additionnels nommés η et χ. En outre, notre objectif est d'avoir le même spectre dans les deux côtés, tout en commençant par le champ Θ qui possède une masse $Q\Sigma$. La seule manière pour réaliser ce but dans la théorie miroir revient à considérer un boson et un fermion qui s'annule en paire à partir de la fonction de partition. Ceci exige aux champs η et χ d'avoir tout les deux une masse $Q\Sigma$. En posant $X \longrightarrow X + \eta\chi$, le superpotential W prend la forme

$$W(\Sigma, X, \eta, \chi) = -Q\Sigma(X) + exp(-X)(1 + \eta\chi).$$

Or le superpotentiel effectif obtenu après:
1) application de la dualité-T à tout les champs chiraux chargés, bosoniques et fermioniques, de la théorie.
2) suppression du champ Σ devient

$$W = \sum_i exp^{-Y_i} + \sum_i exp^{-X_j}(1 + \eta_j\chi_j)$$

tel que les Y_i et les X_j satisfont la condition

$$\sum Q_i Y_i - \sum Q_j X_j = t$$

où t est le paramètre de Kähler complexifié par l'angle thêta de la théorie de jauge $U(1)$ et se note $t = r + i\theta$. Finalement, Cette théorie de Landau-Ginzburg résultante est liée aux géométries miroir des supervariétés de Calabi-Yau.

B. Miroir des supervariétés de CY

L'analyse développée précédemment se concrétise dans des exemples concernant l'étude des miroirs des supervariétés de CY qui a attiré beaucoup d'attention récemment. Plusieurs fructueux résultats sont apparus dans cette direction[28−42] parmi lesquels nous présentons quelques uns.

1. Miroir de $\mathbb{CP}^{3|4}$

D'après[16], le miroir du Calabi-Yau $\mathbb{CP}^{3|4}$ est équivalent à un quadrique de $\mathbb{CP}^{3|3} \times \mathbb{CP}^{3|3}$ à la limite où le paramètre de Kahler t de $\mathbb{CP}^{3|4}$ vérifie $t \longrightarrow \pm\infty$.

En effet, $\mathbb{CP}^{3|4}$ est décrite par un modèle sigma linéaire contenant quatre champs chiraux bosoniques et quatre fermioniques notés respectivement Φ^I et $\Theta^I, I = 0, ..., 3$ tous de charges $+1$[25].

Etant donné que les sommes des charges bosoniques et fermioniques sont égales, alors il se déduit que $\mathbb{CP}^{3|4}$ est une supervariété de Calabi-Yau. La condition du D-terme s'écrit

$$\sum_{I=0}^{3} \left|\Phi^I\right|^2 + \sum_{I=0}^{3} \left|\Theta^I\right|^2 = r \tag{3.1}$$

où le paramètre de kähler r est complexifié par l'angle θ et donne $t = r + i\theta$. Comme déjà vu, le miroir du modèle Landau-Ginzburg associé à $\mathbb{CP}^{3|4}$ est donné par

$$\int \prod_{I=0}^{3} dY_I dX_I d\eta_I d\chi_I \delta(\sum_{I=0}^{3} Y_I - X_{_I} - t) \times$$
$$\exp(\sum_{I=0}^{3} e^{-Y_I} + e^{-X_I} + e^{-X_I}\eta_I\chi_I) \tag{3.2}$$

où $ReY_I = \left|\Phi^I\right|^2$ et $ReX_I = \left|\Theta^I\right|^2$. Cette théorie est invariante par la symétrie $\mathbb{Z}_2$ qui vérifie

$$X_I \leftrightarrow Y_I,\ \ \eta_I \to e^{-X_I}\chi_I,\ \ \chi_I \to e^{Y_I}\eta_I,\ \ t \to -t$$

Afin de reproduire le modèle sigma correspondant, il faut redéfinir les champs pour i=1,2,3 comme suit $X_i = \hat{X}_i + Y_0$ et $Y_i = \hat{Y}_i + Y_0$. Par conséquent, la fonction δ (3.2) donne $X_0 = \sum_{i=0}^{3}(\hat{Y}_i - \hat{X}_i) + Y_0 - t$. L'utilisation de ces résultats ainsi que l'intégration sur les champs fermioniques η_0 et χ_0 mène à l'expression suivante:

$$\int e^{-Y_0 - \sum_i (\hat{Y}_i - \hat{X}_i)} dY_0 \prod_{i=1}^{3} d\hat{Y}_i d\hat{X}_i d\eta_i d\chi_i \times$$
$$\exp[e^{-Y_0}(\sum_{i=1}^{3}(e^{-\hat{Y}_i} + e^{-\hat{X}_i} + 1 + e^{t+\sum_i(\hat{X}_i - \hat{Y}_i)} + e^{-\hat{X}_i}\eta_i\chi_i)]$$

où $\Lambda = e^{-Y_0}$ joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange.

Soit les nouveaux champs x_i et y_i à valeurs dans $\mathbb{C}$, définis par

$$e^{-\hat{X}_i} = x_i\ , \qquad e^{-\hat{Y}_i} = y_i x_i$$

tel que $\eta_i \to e^{\hat{X}_i}\eta_i$. Dans ce cas, l'équation (**??**) prend la forme

$$\int d\Lambda \int \prod_{i=1}^{3} dy_i dx_i d\eta_i d\chi_i \times$$
$$\exp[\Lambda(\sum_{i=1}^{3} x_i y_i + x_i \ \ + 1 + e^t y_1 y_2 y_3 \ \ + \eta_i\chi_i)]$$

Ainsi localement, le miroir de $\mathbb{CP}^{3|4}$ est vu comme une hypersurface de super-Calabi-Yau

$$\sum_{i=1}^{3} x_i y_i + x_i + 1 + e^t y_1 y_2 y_3 + \eta_i \chi_i = 0. \tag{3.3}$$

Dans cette version, la symétrie $\mathbb{Z}_2$ évoquée auparavant n'est pas apparente. Cependant, elle peut réapparaître par un simple échange des rôles de X_0 et Y_0 en tant que multiplicateur de Lagrange, ainsi que les champs qui lui sont associés. Par conséquent nous avons $x_i \leftrightarrow y_i$, $t \leftrightarrow -t$. En particulier, l'application de ce changement à l'équation (3.3) implique

$$\sum_{i=1}^{3} x_i y_i + y_i + 1 + e^{-t} x_1 x_2 x_3 + \eta_i \chi_i = 0. \tag{3.4}$$

Par ailleurs, il est intéressant de mentionner que l'équation (3.3) représente une description locale d'un quadrique de $\mathbb{CP}^{3|3} \times \mathbb{CP}^{3|3}$ pour la limite $t \to -\infty$. En effet, après une redéfinition des coordonnées, (3.3) devient

$$\sum_{i=1}^{3} x_i y_i + 1 + \eta_i \chi_i = 0$$

qui coincide pour $x_0 = 1 = y_0$ avec une partie du quadrique

$$\sum_{I=0}^{3} x_I y_I + \eta_i \chi_i = 0$$

de $\mathbb{CP}^{3|3} \times \mathbb{CP}^{3|3}$ ayant pour coordonnées (x^I, η^i) et (y^I, χ^i) respectivement. En plus, la symétrie $\mathbb{Z}_2$ de la théorie originale est tout simplement la symétrie qui s'échange entre les deux facteurs de $\mathbb{CP}^{3|3}$. A l'instar de ce qui précède, l'usage de l'extension fermionique de la technique de T-dualité montre que le miroir de $\mathbb{CP}^{(3|4)}$ est une hypersuface de SCY donnée par l'eq (3.4), assimilée localement à un quadrique dans $\mathbb{CP}^{3|3} \times \mathbb{CP}^{3|3}$ pour la limite $t \to -\infty$.

2. Géométrie du superconifold

Une autre classe des exemples concernant les miroirs des SCY est étalée dans[35] dont les grandes lignes sont présentées ci-dessous. L'intérêt est figé sur la supervariété $\mathbb{CP}^{(n|n+1)}$ qui est une SCY coïncidant avec l'espace des vides de l'équation des D-termes d'un modèle sigma linéaire de groupe de jauge $U(1)$ décrit par les champs chiraux bosoniques et fermioniques ϕ^i et Θ^i respectivement. Afin de trouver son miroir, il faut procéder avec la même stratégie qu'auparavant. L'intégrale de chemin pour le modèle de LG dual est donné par

$$\int \prod_{i=1}^{n+1} dY_i dX_i d\eta_i d\chi_i \delta(\sum_i Y_i - \sum_i X_i - t) \times$$
$$\exp(\sum_i e^{-Y_i} + \sum_i e^{-X_i}(1 + \eta_i \chi_i)).$$

L'étape suivante repose sur 3 opérations fondamentales:
1) Résoudre la contrainte octroyée par la fonction delta en intégrant le champ X_1 et puis à intégrer tout les champs fermioniques à l'exception des deux η_{n+1}, χ_{n+1}.
2) Redéfinir des champs $y_i = e^{-Y_i}$ et $x_i = e^{-X_i}$ et poser $\tilde{y}_1 = y_1$ et $\tilde{y}_j = y_j / x_j$ pour $j = 2, ..., n+1$.
3) Introduire des champs auxiliaires bosoniques u et v.
Il découle alors que le facteur $1/x_{n+1}$ s'écrit$1/x_{n+1} = \int dudve^{uvx_{n+1}}$ et que les intégrations des champs $\tilde{y}_1$, $x_{i=2,...,n+1}$ mènent à des fonctions delta. Ainsi, la formule résultante correspond à

$$\int \prod_{i=2}^{n+1} d\tilde{y}_i dudv \delta(1 + \eta_{n+1}\chi_{n+1} + uv + \tilde{y}_{n+1}) \times$$
$$\prod_{i=2}^{n} \delta(\tilde{y}_i + 1)\delta(1 + e^t \prod_{i=2}^{n+1} \tilde{y}_i).$$

La dernière fonction delta donne

$$\tilde{y}_{n+1} = \frac{e^{-t}}{\prod_{i=2}^{n} \tilde{y}_i} \qquad (3.5)$$

qui se réécrit $\tilde{y}_{n+1} = \pm e^{-t}$ or en appliquant les contraintes $\prod_{i=2}^{n} \delta(\tilde{y}_i + 1)$. Les signes $+$ et $-$ correspondent respectivement au fait que n est pair ou impair. Par conséquent, la première fonction delta de (3.5) se résoud comme suit

$$1 + \eta_{n+1}\chi_{n+1} + uv \pm e^{-t} = 0. \qquad (3.6)$$

Il est clair que nous avons abouti à une géométrie contenant deux variables bosoniques u, v, contraintes par l'équation précedente, ainsi que deux coordonnées fermioniques. Autrement dit, la superdimension de cette géométrie est bien -1 et elle égale à celle de la supervariété de départ $\mathbb{CP}^{(n|n+1)}$. Subséquemment, cette géométrie miroir ne dépend du nombre n que pour déterminer si le signe du dernier terme de (3.6) est positif ou négatif. A part cette raison, la variété résultante ne dépend pas réellement de n mais seulement de la superdimension. Finalement, l'éq(3.6) s'écrit sous la forme

$$uv + \eta\chi = a \tag{3.7}$$

dans le superespace $\mathbb{C}^{(2|2)}$ avec

$$a = 0 \quad \text{pour} \quad \left\{ \begin{array}{lll} t = 0 & \& & n\,pair \\ t = i\pi & \& & n\,impair \end{array} \right.$$

se concordant ainsi avec l'équation du conifold déformé $xy + uv = a$ dans l'espace ordinaire $\mathbb{C}^4$. De ce fait; la variété décrite par (3.7) est baptisée "superconifold".

Vu l'ampleur de cette variété dans le cas ordinaire au niveau des compactifications des théories des cordes, il est nécessaire d'attribuer à son correspondant étendu les propriétés le caractérisant. En s'inspirant du cas usuel du conifold, l'auteur du[35] réécrit l'éq(3.7) comme

$$u_1^2 + u_2^2 + \lambda_\alpha \lambda^\alpha = a$$

avec les identifications $\chi = \sqrt{2}\lambda^1$ et $\eta = \sqrt{2}\lambda^2$. Soient les décompositions en parties réelles et imaginaires suivantes: $u_i = v_i + iw_i$ et $\lambda_\alpha = \eta_\alpha + i\chi_\alpha$. L'éq (3.7) est alors équivalente à

$$\sum_{i=1}^{2} v_i^2 - w_i^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} \eta_\alpha \eta^\alpha - \chi_\alpha \chi^\alpha = a,$$
$$\sum_{i=1}^{2} v_i w_i + \sum_{\alpha=1}^{2} \eta_\alpha \chi^\alpha = 0.$$

Il s'ensuit donc que les coordonnées (w_i, χ^α) s'intérprètent comme des coordonnées de la fibre, tandis que (v_i, η^α) paramétrisent la supersphère $S^{(1|2)}$, et $\sum_{i=1}^{2} v_i^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} \eta_\alpha \eta^\alpha = a$ dans la base. Par ailleurs, de manière formelle $uv + \eta\chi = a$ peut être assimilée au superfibré cotangent à la supersphère noté $T^*(S^{(1|2)})$.

En outre, il existe également une extension correspondant à la petite résolution de la singularité conifold ordinaire[35]. En termes des mathématiques, ça revient à remplacer le conifold par le fibré $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \to \mathbf{CP^1}$. Pour le cas super, en introduisant $(z_{pair}|z_{impair})$ éléments de $\mathbb{C}^{(1|1)}/\mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C}^{(0|1)}$, la résolution est décrite par

$$\begin{pmatrix} u & \eta \\ \nu & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{pair} \\ z_{impair} \end{pmatrix} = 0$$

de sorte que le superconifold s'obtient à partir du Berzinien ou le superdéterminant

$$s\det \begin{pmatrix} u & \eta \\ \nu & v \end{pmatrix} = 0$$

Rappelons que pour une supermatrice $M \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dont A, B sont bosoniques, C, D sont fermioniques le superdeterminant est défini par:

$$sdet(M) = \frac{det(A)}{det(D - CA^{-1}B)} = \frac{det(A - BD^{-1}C)}{det(D)} \tag{3.8}$$

Par suite, la singularité à l'origine est remplacée par $\mathbb{C}^{(0|1)}$.

Le dernier commentaire consiste à noter que l'équation du conifold bosonique provient d'une description en termes de quatre superchamps chiraux $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ de charges $U(1)$ $(1, 1, -1, -1)$. Dans ce contexte, les combinaisons $x \equiv x_1x_3$, $u \equiv x_1x_4$, $v \equiv x_2x_3$, $y \equiv x_2x_4$ sont des invariants de jauge qui satisfont une contrainte: l'équation $xy + uv = a$ du conifold. Cependant, pour le superconifold, il faut modifier le signe des charges à $(1, 1, 1, 1)$ et par conséquent il n'y a plus de description en termes des invariants de jauge.

3. Supervariétés de CY torique

Cet exemple traite un autre résultat des miroirs des SCY réalisé dans[42] comme la fibration triviale suivante

$$\begin{aligned}&\mathbb{WCP}^{p_1-1}(w_1^1, ..., w_{p_1}^1) \times \mathbb{WCP}^{p_2-1}(w_1^2, ..., w_{p_2}^2)\\ &\times ... \times \mathbb{WCP}^{p_n-1}(w_1^n, ..., w_{p_n}^n)\end{aligned} \tag{3.9}$$

et dont les parties bosoniques correspondent aux variétéss compactes toriques qui sont l'espace cible du modèle-A construit comme un modèle sigma linear $U(1)^{\otimes n}$. L'extension à une supervariété Grassmannienne s'obtient par l'adjonction de f champs fermioniques Ψ_α aux[1] $p + n$ champs bosoniques

$$\Phi_1^1, ..., \Phi_{p_1}^1; ...; \Phi_1^n, ..., \Phi_{p_n}^n.$$

Pour $a = 1, ..., n$; les charges de l'ensemble des champs sont données par une matrice

$$q'^a = (q^a|Q^a) = (q_1^a, ..., q_{p+n}^a; Q_1^a, ..., Q_f^a),$$

où $q_1^a = (w_1^1, ..., w_{p_1}^1; ...; w_1^n, ..., w_{p_1}^n)$ et ainsi de suite. Les D-termes sont de la forme

$$\sum_{i=1}^{p+n} q_i^a |\Phi_i|^2 + \sum_{\alpha=1}^{f} Q_\alpha^a |\Psi_\alpha|^2 = r^a$$

tel que la condition de SCY est donnée par

$$\sum_i q_i^a = \sum_\alpha Q_\alpha^a.$$

Dans ce cas la dualité-T attribue aux champs Φ_i les duaux Y_i et aux Ψ_α les triplets $(X_\alpha, \eta_\alpha, \chi_\alpha)$ et par conséquent l'intégrale de chemin du modèle miroir qui est le modèle super Landau-Ginzburg s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}\hat{Z} = \int \prod_i dY_i \left(\prod_\alpha dX_\alpha d\eta_\alpha d\chi_\alpha\right) \times\\ \prod_a \delta(\sum_i q_i^a Y_i - \sum_\alpha Q_\alpha^a X_\alpha - t^a)\\ \exp\left(\sum_i e^{-Y_i} + \sum_\alpha e^{-X_\alpha}(1 + \eta_\alpha\chi_\alpha)\right).\end{aligned}$$

[1] $p = \sum_{a=1}^n (p_a - 1)$.

En suivant la même procédure déjà utilisée dans les exemples précédents; dans le cas $n = f$ et pour les champs y_i redéfinis par

$$y_i = \exp(-\sum_{\alpha=1}^{f}\sum_{a=1}^{f}(Q^{-1})^a_\alpha q^a_i Y_i),$$

la supergéométrie miroir de (3.9) correspond à l'hypersurface

$$\mathbb{WCP}^4_{(\frac{Q_2^2-Q_1^2}{g},\frac{Q_2^2-Q_1^2}{g},\frac{Q_2^1-Q_1^1}{g},\frac{Q_1^1-Q_2^1}{g},\frac{Q_1^1-Q_2^1+m(Q_2^2-Q_1^2)}{g})}$$

où

$$\begin{aligned} g &= pgdc(Q_2^2 - Q_1^2, Q_2^1 - Q_1^1, Q_1^1 - Q_2^1 + m(Q_2^2 - Q_1^2)) \\ &= pgdc(Q_2^2 - Q_1^2, Q_2^1 - Q_1^1). \end{aligned}$$

IV. THÉORIE DE SUPERGRAVITÉ CONFORME $\mathcal{N} = 4$ ET CORDES TWISTORIELLES

En s'inspirant du travail de Witten[16], Berkovits propose une nouvelle alternative en terme de la théorie des cordes dans l'espace twistoriel[20], dans l'objectif de décrire la théorie de supergravité conforme $\mathcal{N} = 4$ rien qu'en utilisant des variables twistorielles réelles de la surface d'univers. Afin de mieux illustrer cette nouveauté, nous commençons par introduire la théorie de supergravité conforme $\mathcal{N} = 4$, $D = 4$. En particulier nous nous intéressons à son spectre linéaire dans le superespace, que nous comparons par la suite avec les résultats fournis par la description de la théorie de corde dans l'espace twistoriel. Cette théorie qui est constituée de deux versions: l'alternative de Berkovits qui concerne la corde ouverte twistorielle, en utilisant des variables twistorielles réelles de la surface d'univers, et le modèle-B dont l'espace cible est la supervariété de Calabi-Yau $\mathbb{CP}^{3|4}$. En décrivant comment ces deux modèles sont construits, et en exhibant leurs propriétés nous parvenons à réaliser qu'elles sont duales.

A. Supergravité Conforme dans Superespace

Contrairement aux supergravités ordinaires qui se réalisent pour $1 \leq \mathcal{N} \leq 8$; les théories de supergravité conforme n'existent que pour $1 \leq \mathcal{N} \leq 4$. En plus du générateur supersymétrique ordinaire Q_α ($\alpha = 1, \ldots, 4$) et du générateur supersymétrique conforme S_α, s'ajoutent les générateurs de l'algèbre conforme bosonique associée à la théorie en question. Ces générateurs sont

- les générateurs de translation P_m ($m = 0, \ldots, 3$)
- les générateurs conformes de "boost" K_m
- les générateurs de Lorentz M_{mn}
- les générateurs d'échelle D.

Dans la superalgèbre, les transformations chirales de Q_α et S_α exigent un générateur bosonique additionnel noté A. En littérature, le groupe de symétrie superconforme de la théorie de supergravité conforme[47] $N = 4$ est une forme réelle de $PSU(4|4)$ dont la partie bosonique est $SU(4) \times SU(4)$, sa symétrie correspondante est la symétrie R . L'ensemble total des générateurs est constitué de

$$\{P_m, M_{mn}, D, K_m\}\,,\ \ \{Q_\alpha, S_\alpha\}\ \text{ et }\ \{A\}\,,$$

qui sont tous à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Par conséquent, le commutateur de deux générateurs de degré p et q ne contient que les générateurs de degré $p + q$. Etant donné que les degrés des générateurs se présentent comme suit

générateur	K_m	S_α	M_{mn}, D, A	Q_α	P_m
degré	-2	-1	0	1	2

alors, les différents commutateurs résultent de ce tableau[43]. A titre d'exemple: $[Q_\alpha, P_m] = 0$ et $[P_m, P_n] = 0$ (idem pour la paire (K_m, S_α) et ainsi de suite ...). D'autre part, la supergravité conforme linéaire $\mathcal{N} \leq 4$ se décrit par le biais d'une force de champ chiral caractérisée par[44]:

- 2s indices spinoriels
- une dimension $s = \frac{1}{2}(4 - \mathcal{N})$

Ce superchamp chiral contient les spins s, $s + \frac{1}{2}, \ldots$, $s + \frac{\mathcal{N}}{2}$ et satisfait plusieurs contraintes parmi lesquelles: le spin ne doit pas dépasser deux ; autrement dit $(s + \frac{N}{2}) = 2$.

Pour la supergravité conforme $\mathcal{N} = 4$, $D = 4$, qui est l'objet d'intérêt de cette section, le superchamp scalaire chiral usuel $\mathcal{W}(x^{a\dot{a}}, \theta_a^A, \theta_A^{\dot{a}})$ contient les champs suivants:

$$(C,\ \Lambda_{Aa},\ E_{(AB)},\ T_{(ab)}^{[AB]},\ \eta_\mu^{Aa},\ \xi_{aC}^{[AB]},\ V_{\mu A}^{B},\ W_{abcd},$$
$$d_{[AB]}^{[CD]},\ \bar{\xi}_{[AB]}^{\dot{a}C},\ \bar{\eta}_{\mu A}^{\dot{a}},\ \bar{E}^{(AB)},\ \bar{T}_{(\dot{a}\dot{b})}^{[AB]},\ \bar{\Lambda}_{\dot{a}}^{A},\ \bar{C}).$$

La chiralité du superchamp $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=4}(x, \theta, \bar{\theta})$ s'exprime par la condition

$$\bar{D}_{\dot{a}}^{A} \mathcal{W}^{\mathcal{N}=4}(x, \theta, \bar{\theta}) = 0$$

qui se réduit au simple fait que $\mathcal{W}$ est indépendant de $\bar{\theta}_A^{\dot{a}}$. Ainsi seul le développement en θ_a^A est pris en compte. Par conséquent, $\mathcal{W}(x, \theta)$ se développe comme suit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} = {} & C + \theta^{Aa}\Lambda_{Aa} + \left(\theta^2\right)^{(AB)} E_{(AB)} \\
& + \left(\theta^2\right)_{[AB]}^{(ab)} T_{(ab)}^{[AB]} + \left(\theta^3\right)_{D}^{(abc)} (\partial\eta)_{(abc)}^{D} \\
& + \left(\theta^3\right)_{[AB]}^{aC} \xi_{aC}^{[AB]} + \left(\theta^4\right)_{B}^{A(ab)} (\partial V)_{(ab)A}^{B} \\
& + \left(\theta^4\right)^{(abcd)} W_{abcd} + \left(\theta^4\right)_{[CD]}^{[AB]} d_{[AB]}^{[CD]} \\
& + \left(\theta^5\right)_{C}^{a[AB]} \partial_{a\dot{a}}\bar{\xi}_{[AB]}^{\dot{a}C} + \left(\theta^5\right)^{A(abc)} (\partial\rho)_{A(abc)} \\
& + \left(\theta^6\right)_{(AB)} \partial_\mu\partial^\mu \bar{E}^{(AB)} + \left(\theta^6\right)_{[AB](ab)} \partial^{a\dot{a}}\partial^{b\dot{b}}\bar{T}_{(\dot{a}\dot{b})}^{[AB]} \\
& + \left(\theta^7\right)_{Aa} (\partial^\mu\partial_\mu) \partial^{a\dot{a}}\bar{\Lambda}_{\dot{a}}^{A} + \left(\theta^8\right) (\partial_\mu\partial^\mu)^2 \bar{C}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

En général, l'action linéaire de la théorie de supergravité conforme $\mathcal{N} = 4$ est donnée par:

$$S = \int d^4x \int d^8\theta \mathcal{W}^2 \tag{4.2}$$

et se réécrit dans notre cas:

$$\begin{aligned}
S = \int d^4x (& C(\partial^\mu\partial_\mu)^2\bar{C} + \Lambda_{aA}(\partial^\mu\partial_\mu)\partial^{a\dot{a}}\bar{\Lambda}_{\dot{a}}^{A} \\
& + E_{(AB)}\partial_\mu\partial^\mu\bar{E}^{(AB)} + T_{(ab)}^{[AB]}\partial^{a\dot{a}}\partial^{b\dot{b}}\bar{T}_{(\dot{a}\dot{b})[AB]} \\
& + \xi_{aC}^{[AB]}\partial^{a\dot{a}}\bar{\xi}_{\dot{a}[AB]}^{C} + d_{[CD]}^{[AB]}d_{[AB]}^{[CD]} \\
& + (\partial V)_{(ab)A}^{B}(\partial V)_{B}^{(ab)A} + R_{(abcd)}R^{(abcd)} \\
& + (\partial\eta)_{(abc)}^{A}(\partial\rho)_{A}^{(abc)}).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

1. Contraintes sur le superchamp scalaire chiral

Le superchamp scalaire chiral $\mathcal{W}(x^{a\dot{a}},\theta_a^A,\theta_A^{\dot{a}})$ satisfait la condition

$$\epsilon^{ABCD}D_C^aD_{Ea}D_{bD}D_F^b\mathcal{W}=\epsilon_{EFGH}\bar{D}^{\dot{a}A}\bar{D}_{\dot{a}}^G\bar{D}_{\dot{b}}^B\bar{D}^{\dot{b}H}\bar{\mathcal{W}} \tag{4.4}$$

où D_A^a et $\bar{D}_{\dot{a}}^A$ sont les dérivées covariantes usuelles du superespace données par:

$$D_A^a=\frac{\partial}{\partial\theta_a^A}+\bar{\theta}_A^{\dot{a}}\partial_{a\dot{a}}\qquad \bar{D}_{\dot{a}}^A=\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_A^{\dot{a}}}. \tag{4.5}$$

Parmi les contraintes déduites de l'équation (4.4):

1. les champs auxiliaires $d_{[EF]}^{[AB]}=\epsilon^{ABCD}D_C^aD_{Ea}D_{bD}D_F^b\ \mathcal{W}$ sont réels.
2. le tenseur de Weyl, dont $W_{abcd}=\epsilon^{ABCD}D_{Aa}D_{Bb}D_{Cc}D_{Dd}\mathcal{W}$ est la partie auto duale, satisfait les identités usuelles de Bianchi.
   En vertu de l'équation (4.4), les champs composants le développement du superchamp chiral $\mathcal{W}$ obéissent plusieurs conditions parmi lesquelles:

▲ $\mathcal{W}_{abcd}$ vérifie les identités de Bianchi ce qui revient à le construite à partir d'un Vielbein $e_\mu^{a\dot{a}}$.

▲ la composante d satisfait $d_{[AB]}^{[BC]}=0$ et elle est réelle (de même pour $\xi_{[AB]}^B=0$).

Plus encore d'après[22], les identités de Bianchi provenant de (4.4) permettent d'exprimer certaines composantes du développement de $\mathcal{W}$ en termes des potentiels η, V et ρ qui réalisent:

$$\begin{aligned}
V_{\mu A}^A&=0\\
\rho_{\nu Aa}&=\sigma_{a\dot{a}}^\mu(\partial_\mu\bar{\eta}_{\nu A}^{\dot{a}}-\partial_\nu\bar{\eta}_{\mu A}^{\dot{a}}+\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\tau\kappa}\partial^\tau\bar{\eta}_A^{\kappa\dot{a}})\\
(\partial V)_{(ab)A}^B&=\partial_\mu V_{\nu A}^B\,(\sigma^{\mu\nu})_{(ab)}\\
(\partial\eta)_{(abc)}^A&=\partial_\mu\eta_{\nu(a}^A\,(\sigma^{\mu\nu})_{bc)}\\
(\partial\rho)_{(abc)A}&=\partial_\mu\rho_{\nu A(a}(\sigma^{\mu\nu})_{bc)}
\end{aligned}$$

où la deuxième formule relie $\rho_{\mu Aa}$ à $\bar{\eta}_{\mu A\dot{a}}$.

2. Spectre de la supergravité conforme $\mathcal{N}=4$

L'action (4.3) joue un rôle crucial dans la détermination du spectre de la supergravité conforme $\mathcal{N}=4$. En effet, l'analyse des solutions de ses équations de mouvement mène aux différentes hélicités décrites par les champs de la théorie[45], comme nous le développement dans ce suit:
a. Champ scalaire C: L'équation de mouvement du champ scalaire $C(x)$ est

$$\Box^2C(x)=0 \tag{4.6}$$

tel que $\Box=\partial_\mu\partial^\mu$ est l'opérateur cinétique usuel d'un champ scalaire non massif.
L'équation de mouvement (4.6) admet pour solutions les ondes planes pour un vecteur E quelconque:

$$\sigma_k=\exp(ik{\cdot}x)\quad\text{et}\quad\sigma_k'=E{\cdot}x\exp(ik{\cdot}x) \tag{4.7}$$

Afin de construire la solution générale de $\Box^2C(x)=0$,[22] s'est limité , pour raison de simplicité à un vecteur E arbitraire qui obéit la condition $E\cdot k\neq0$ et qui est unitaire dans la direction temporelle. Pour ce choix, la solution générale de l'équation $\Box^2C(x)=0$ s'écrit:

$$C(x)=\int d^4k\delta(k^2)e^{ik\cdot x}\left(C_0(k)+i\frac{x_0}{k_0}C_0'(k)\right). \tag{4.8}$$

Les champs $C_0(k)$ et $C_0'(k)$[2] qui forment tout les deux un **dipôle**, ont les trois caractéristiques suivantes: définis pour $k^2=0$, indépendants et portent une hélicité zéro.

b. Champ spinoriel Λ_A^a : A partir de l'action (4.3) résulte l'équation de mouvement associée au champ spinoriel Λ_A^a qui est du troisième ordre et de la forme

$$\Box\partial_{a\dot{a}}\Lambda_A^a=0. \tag{4.9}$$

En utilisant la même méthode appliquée pour le champ scalaire, les états d'hélicité de ce champ spinoriel se déduisent. Pour (4.9), les solutions d'intérêt diffèrent de (4.7) puisqu'à ce stade ces solutions sont des fonctions d'onde $\exp(ik\cdot x)$ multipliées par un polynôme. Pour analyser de prés ces ondes planes, Berkovits et Witten (BW) ont introduit simultanément deux paires de spineurs $(\pi,\ \tilde{\pi})$ et $(\tau,\ \tilde{\tau})$ qui satisfont

$$\pi^a\tilde{\pi}^{\dot{a}}=k^{a\dot{a}},\qquad \pi^a\tilde{\tau}_a=1,\qquad \tilde{\pi}^{\dot{a}}\tau_{\dot{a}}=1$$

de telle sorte que π et $\tilde{\tau}$ constituent une base de l'espace des spineurs de chiralité positive. Dans cette base, le champ Λ_A^a se décompose comme

$$\Lambda_A^a=\pi^a\Lambda_A^{(1)}+\tilde{\tau}^a\Lambda_A^{(2)}.$$

L'équation de mouvement (4.9) devient alors

$$\Box^2\Lambda_A^{(1)}=0\ \text{ et }\ \Box\Lambda_A^{(2)}=0.$$

Il s'ensuit la solution générale suivante:

$$\Lambda_A^a(x)=\int d^4k\delta(k^2) \tag{4.10}$$

$$e^{ik\cdot x}\left(\pi^a(\Lambda_{-\frac{1}{2}A}(k)+i\frac{x_0}{k_0}\Lambda'_{-\frac{1}{2}A}(k))+\tilde{\tau}^a\Lambda_{\frac{1}{2}A}(k)\right) \tag{4.11}$$

Les états provenant du champ spinoriel Λ_A^a sont présentés comme suit: $\Lambda_{-\frac{1}{2}A}$ et $\Lambda'_{-\frac{1}{2}A}$ se combinent pour donner un champ dipôle d'hélicité $-\frac{1}{2}$, tandis que $\Lambda_{\frac{1}{2}A}$ décrit un champ ordinaire d'hélicité $+\frac{1}{2}$.

c. Autres champs :

L'équation de mouvement du champ $T_{(ab)}^{[AB]}(k)$ s'écrit

$$\partial^{a\dot{a}}\partial^{b\dot{b}}T_{(ab)}^{[AB]}=0 \tag{4.12}$$

ce qui implique la forme suivante de $T_{(ab)}^{[AB]}$

$$T_{(ab)}^{[AB]}=\int d^4k\delta(k^2)$$
$$e^{ik\cdot x}\left(\pi_a\pi_b(T_{-1}^{[AB]}+i\frac{x_0}{k_0}T_{-1}'^{[AB]})+\pi_{(a}\tilde{\tau}_{b)}T_0^{[AB]}\right).$$

A noter que les indices bas des trois $T^{[AB]}$ indiquent qu'ils décrivent des ondes d'hélicité -1, -1 et 0. .Le gravitino $\eta_{\mu a}^A$ et le graviton $e_{\mu a\dot{a}}$ réalisent les deux équations linéaires suivantes

$$\partial^{e\dot{b}}\partial^{a(\dot{c}}\partial^{\dot{a})b}\sigma_{b\dot{b}}^{\mu}\eta_{\mu a}^{A}=0;$$
$$\partial^{\dot{a}(c}\partial^{d)\dot{b}}\partial^{a(\dot{c}}\partial^{\dot{d})b}\sigma_{b\dot{b}}^{\mu}e_{\mu a\dot{a}}=0. \tag{4.13}$$

[2]la condition de normalisation de C_0' est prise comme suit: $\Box C=\int d^4k\delta(k^2)e^{ik\cdot x}C_0'(k)$

et En procédant avec la même analyse appliquée aux champ précédents, les solutions générales des équations (??) et (4.13) sont de la forme:

$$\begin{aligned}
\eta^A_{\mu a} &= \sigma^{b\dot{b}}_\mu \int d^4k\delta(k^2)e^{ik.x}(\pi_a\pi_b\tau_{\dot{b}}(\eta^A_{-\frac{3}{2}} + i\frac{x_0}{k_0}\eta^A_{-\frac{3'}{2}}) \\
&+ \pi_{(a}\tilde{\tau}_{b)}\tau_{\dot{b}}\eta^A_{-\frac{1}{2}}) + \tilde{\tau}_a\tilde{\tau}_b\tilde{\pi}_{\dot{b}}\eta_{\frac{3}{2}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{\mu\dot{a}a} &= \sigma^{b\dot{b}}_\mu \int d^4k\delta(k^2)e^{ik.x} \\
&\quad (\pi_a\pi_b\tau_{\dot{a}}\tau_{\dot{b}}(e_{-2}(k) + i\frac{x_0}{k0}e_{-2'}(k)) \\
&\quad + \pi_{(a}\tilde{\tau}_{b)}\tau_{\dot{a}}\tau_{\dot{b}}e_{-1}(k) + \tilde{\tau}_a\tilde{\tau}_b\tilde{\pi}_{(\dot{a}}\tilde{\tau}_{\dot{b}}e_1(k) \\
&\quad + \tilde{\tau}_a\tilde{\tau}_b\tilde{\pi}_{\dot{a}}\tilde{\pi}_{\dot{b}}(e_2(k) + i\frac{x_0}{k_0}e_{2'}(k))).
\end{aligned}$$

Ce résultat s'obtient également en utilisant le fait que les polarisations de $\eta^A_{\mu a}$ et de $e_{\mu\dot{a}a}$, qui emploient π_a ainsi que $\tilde{\pi}_{\dot{a}}$, subissent aux transformations de jauge

$$\begin{aligned}
\delta\eta^A_{\mu a} &= \sigma^{b\dot{b}}_\mu(\pi_b\tilde{\pi}_{\dot{b}}\Omega^A_a + \epsilon_{ab}\kappa^A_{\dot{b}}) \\
\delta e_{\mu a\dot{a}} &= \sigma^{b\dot{b}}_\mu(\pi_b\tilde{\pi}_{\dot{b}}\Sigma_{a\dot{a}} + \epsilon_{ab}\tilde{l}_{\dot{a}\dot{b}} + \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}l_{ab})
\end{aligned}$$

où $(\Omega^A_a, \kappa^A_{\dot{b}}, \Sigma_{a\dot{a}}, \tilde{l}_{\dot{a}\dot{b}}, l_{ab})$ sont les paramètres de jauge.
.Finalement de l'action (4.3), il reste les champs $E_{(AB)}$, $\xi^{[AB]}_{aC}$ et $V^B_{\mu A}$ dont les équations de mouvement sont les équations usuelles

$$\begin{aligned}
&\Box E_{(AB)} = 0, \quad \partial^{a\dot{a}}\xi^{[AB]}_{aC} = 0, \\
&\partial_\mu\partial_\rho(\sigma^{\mu\nu})_{(ab)}(\sigma^{\rho\sigma})^{(ab)}V^A_{\sigma B} = 0
\end{aligned}$$

qui décrivent respectivement les champs d'hélicité 0, $\frac{1}{2}$ et 1.

Pour conclure cette partie, il s'avère intéressant de rassembler tout ces résultats dans un seul tableau exhibant les hélicités ainsi que les représentations irréductibles R du groupe $SU(4)$ (noté $SU(4)_R$) des états physiques. Ce tableau contient également la R-charge $U(1)$ d'après laquelle le superchamp chiral $\mathcal{W}$ porte la charge **4** et θ possède la charge **1**.

	$U(1)$	hélicité	$SU(4)_R$
C	4	$0,0$	$\mathbf{1}$
Λ^a_A	3	$-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$E_{(AB)}$	2	0	$\overline{10}$
$T^{[AB]}_{(ab)}$	2	$-1,-1,0$	$\mathbf{6}$
$\xi^{[AB]}_{aC}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\mathbf{20}$
η^{Aa}_μ	1	$-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$	$\mathbf{4}$
$V^B_{\mu A}$	0	$1,-1$	$\mathbf{15}$
$d^{[CD]}_{[AB]}$	0	*sans*	$\mathbf{20}$
$e^{a\dot{a}}_\mu$	0	$2,2,1,-1,-2,-2$	$\mathbf{1}$
$\bar{\eta}^{\dot{a}}_{\mu A}$	-1	$\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}$	$\bar{4}$
$\bar{\xi}^{\dot{a}C}_{[AB]}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\overline{20}$
$\bar{T}^{[AB]}_{(\dot{a}\dot{b})}$	-2	$1,1,0$	$\mathbf{6}$
$\bar{E}^{(AB)}$	-2	0	$\mathbf{10}$
$\bar{\Lambda}^A_{\dot{a}}$	-3	$\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$	$\mathbf{4}$
$\bar{C}$	-4	$0,0$	$\mathbf{1}$

B. Théories des cordes twistorielles

Cette section décrit les opérateurs vertex de la corde twistorielle dans deux versions. La première concerne la corde ouverte twistorielle tandis que la seconde développe le modèle B dans le superespace $\mathbb{CP}^{3|4}$. Une fois le spectre obtenu dans le superespace twistoriel, il sera analysé et interprété dans l'espace-temps de Minkowski.

1. Corde ouverte twistorielle

a. Action: Pour la théorie des cordes ouvertes dans l'espace twistoriel; les variables sont de mouvements gauche (L) et droit (R). Elles comportent

$$Z_L^I = (\lambda_L^\alpha, \mu_L^{\dot{\alpha}}, \psi_L^A); \quad Z_R^I = (\lambda_R^\alpha, \mu_R^{\dot{\alpha}}, \psi_R^A)$$

où α et $\dot{\alpha} = 1, 2$ et $A = 1, \cdots, 4$, ainsi que leurs moments conjugués notés:

$$Y_L^I \quad \text{et} \quad Y_R^I,$$

et les courants de l'algèbre de courant satisfaisant l'OPE usuel:

$$j_L^k \quad \text{et} \quad j_R^k$$

pour $k = 1, \ldots, dim(G)$; où G est l'algèbre de Lie. Les conditions au bord pour cette corde ouverte s'expriment par

$$Z_L^I = Z_R^I; \quad Y_L^I = Y_R^I, \quad j_L^k = j_R^k. \tag{4.14}$$

D'autre part; comme c'est déjà mentionné précédemment, le fait que les variables twistorielles sont réelles implique que l'espace cible associé à la théorie de SYM est de signature $(+---)$, et par conséquent $(+-)$ représente la signature de la surface d'univers. Dans ce cas; l'action de la surface d'univers pour ces champs de matière est de la forme

$$S = \int d^2z \left(Y_{LI} \nabla_R Z_L^I + Y_{RI} \nabla_L Z_R^I \right) + S_C \tag{4.15}$$

tel que S_C correspond à l'action des courants d'algèbre, tandis que ∇_R et ∇_L sont les dérivées covariantes données par

$$\nabla_R = \bar{\partial}_A = \bar{\partial} + A, \qquad \nabla_L = \partial_A = \partial + A$$

contenant un $GL(1, \mathbb{R})$ champ de jauge (connection) pour lequel $(+1)$ est la charge associée à Z_L^I et Z_R^I alors que Y_{LI} et Y_{RI} portent la charge (-1). En passant à la version quantique, l'action (4.15) conduit à des fontômes de mouvement droit et gauche. Les premiers sont ceux de Virasoro notés (b_L, e_L) et (b_R, e_R), cependant les seconds sont de type $GL(1)$ et se nomment (u_L, v_L) et (u_R, v_R). Il s'ensuit alors que de nouvelles conditions de bords s'ajoutent à (4.14)

$$\begin{aligned} e_L &= e_R, \qquad & b_L &= b_R \\ u_L &= u_R, \qquad & v_L &= v_R. \end{aligned}$$

Avant le twisting, les poids conformes se distribuent respectivement comme suit:

$$\begin{aligned} Z^I &\longleftrightarrow (0,0), \qquad & Y_I &\longleftrightarrow (1,0) \\ (b,e) &\longleftrightarrow (2,-1), \qquad & (u,v) &\longleftrightarrow (1,0) \end{aligned}$$

b. Etats physiques Utilisons les générateurs de Virasoro T, le courant J de l'algèbre de courant et les ghosts (b, c), (u, v), l'opérateur BRST se construit[21]:

$$Q = \int dz \, [eT + vJ + eu\partial v + eb\partial e]$$

où le tenseur énergie-impulsion T ainsi que J le courant GL(1) contribuent par les formules suivantes:

$$T = Y_I \partial Z^I + T_c \quad \text{et} \qquad J = Y_I Z^I.$$

Ainsi pour avoir des anomalies conformes nulles ($Q^2 = 0$), les différents paramètres doivent porter des charge centrales c bien particulières qui nous résumons dans le tableau suivant:

	T_c	(b, e)	(u, v)	Y_I	Z^I
$c =$	28	-26	-2	0	0

(autrement il n'y a pas d'anomalie $GL(1)$). Notons que contrairement à la théorie de corde ouverte usuelle où les indices de l'algèbre de Lie proviennent des facteurs de Chan-Patton, c'est l'algèbre de courant qui procure ces indices dans cette alternative[20].

Les états physiques de cette corde ouverte sont décrits en termes des opérateurs vertex qui sont des champs primaires, de dimension 1 et neutres sous l'action de $GL(1)$[22]. Dans cette version, les champs primaires les plus simples sont les champs $\phi_k(Z)$ de dimension 0 invariants sous l'action de $GL(1, \mathbb{R})$ sur Z^I. Autrement dit ϕ est invariant pour $Z \to tZ$ avec $t \in \mathbb{R}$ d'où ϕ est une fonction quelconque du super espace twistoriel tel que $\phi_k(Z)$ est de charge nulle. Il s'ensuit alors que la multiplication de ces champs par l'un des courants j^k, $k = 1, \ldots, dimG$ conduit aux premiers types des opérateurs vertex de dimension 1 noté

$$V_\phi = j^k \phi_k(Z) \,. \tag{4.16}$$

De manière similaire, d'autres opérateurs vertex se construisent à partir des expressions linéaires en fonction des Y et ∂Z -qui sont tout les deux de dimension 1. Ces autres types d'opérateurs de sont de la forme:

$$V_f = Y_I f^I(Z) \,, \qquad V_g = g_I(Z) \, \partial Z^I \tag{4.17}$$

Bien qu'ils soient de dimension 1, les deux autres conditions manquantes pour que V_f et V_g constituent des opérateurs vertex sont garanties comme suit:
(1) Ils sont $GL(1)$ neutres si respectivement:
$f^I(Z)$ est de charge $+1$; $f \to tf$
$g_I(Z)$ porte la charge -1; $g \to t^{-1}g$
(2) Ils sont des champs primaires par rapport aux générateurs de $GL(1)$ et de Virasoro (T et J) si:

- f^I satisfait la condition $\partial_I f^I = 0$ qui implique que f^I est un volume préservé d'un champ vectoriel.
- g_I vérifie la contrainte $Z^I g_I = 0$ ce qui signifie que $g_I dZ^I$ est une 1-*forme* bien définie.

Par surcroît, ces fonctions f^I et g_I sont invariantes de jauge tel que

$$\delta f^I = Z^I \Lambda \quad \text{et} \quad \delta g_I = \partial_I \chi.$$

Finalement, cette partie se clôture par une intéressante idée évoquée dans[21]. Celle-ci nous informe que grâce à la transformation de Penrose, qui sera bien explicité dans la section suivante, $\phi_k(Z)$ décrit les états de la théorie super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ alors que $f^I(Z)$ et $g_I(Z)$ décrivent les états de la supergravité conforme $\mathcal{N} = 4$. Cette idée sera explicitée par la suite.

2. Spectre dans l'espace de Minkowski

Cette partie utilise les résultats précédents afin de présenter le spectre des champs non massifs dans l'espace-temps de Minkowski caractérisé par les champs twistoriels. L'idée de base[13] repose sur le fait qu'une *fonction de coordonnées homogènes Z^I de l'espace twistoriel (ou plus précisément homogène en Z^I de degré k) décrit un état non massif dans l'espace-temps de Minkowski portant une hélicité* $(1+\frac{k}{2})$ [transformation de Penrose].

Afin de mieux illustrer cette idée, il vaut mieux traiter les exemples des champs ϕ_k, f^I et g_I déjà mentionnés et qui sont des fonctions des variables bosoniques $\lambda^a, \mu^{\dot{a}}$ et fermionique ψ^A.
Les champs ϕ_k (4.16) sont des superchamps à valeurs dans les lignes fibrés O, $O(-1)$, $O(-2)$, $O(-3)$ et $O(-4)$, caractérisés par les charges $(0,-1,-2,-3,-4)$. Alors en tenant compte de la transformation de Penrose, ces champs décrivent respectivement les particules ayant les hélicités $(1,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},-1)$.

Dans ce même esprit, le développement de la fonction f^I (4.17) en puissance de ψ que nous notons $f^I(\lambda,\mu,\psi)$ est de la forme

$$\begin{gathered} f_0^I(\lambda,\mu)+f_{1A}^I(\lambda,\mu)\psi^A+f_{2AB}^I(\lambda,\mu)\psi^A\psi^B \\ +f_{3ABC}^I(\lambda,\mu)\psi^A\psi^B\psi^C+f_{4ABCD}^I(\lambda,\mu)\psi^A\psi^B\psi^C\psi^D \end{gathered}$$

tel que f_k^I est homogène en λ et μ de degré $(1-k)$. Cette fonction décrit un état non massif d'hélicité $(\frac{3}{2}-\frac{k}{2})$ lorsque nous ignorons le moment angulaire porté par l'indice I. Ceci se résume comme suit

k	degré de f_k^I	hélicité de l'état
0	1	$\frac{3}{2}$
1	0	1
2	-1	$\frac{1}{2}$
3	-2	0
4	-3	$-\frac{1}{2}$

(4.18)

Dans le cas $\psi^A=0$, pour chaque valeur I, $f^I(\lambda,\mu)$ est homogène en Z de degré 1; avec I qui admet 3 choix possibles $I=(a,\dot{a},A)$. En outre, les cas $I=a$ où $\dot{a}$ sont des états bosoniques alors que $I=A$ correspond à des états fermioniques. Ainsi en ignorant le spin porté par l'indice I, il résulte 8 états dont 4 d'hélicité bosonique et les autres d'hélicite fermionique tel que selon l'idée de base de[13] prescrite avant, chacun de ces états est d'hélicité $\frac{3}{2}$.

Mais signalons qu'il n'est pas du tout correct d'ignorer le spin porté par I. En effet, a et $\dot{a}$ prennent chacun deux valeurs possibles et leurs deux états portent l'helicité $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ respectivement. Cependant l'indice A ne porte aucune helicité mais il se transforme comme la représentation 4 du groupe $SU(4)$ des symétries R. Par conséquent en tenant compte du spin de l'indice I, les états résultants de la fonctions $f^I(\lambda,\mu)$ deviennent comme suit :
2 états bosoniques d'hélicité 2
2 états bosoniques d'hélicité 1
4 états fermioniques d'hélicité $\frac{3}{2}$ se transformant en **4** de $SU(4)_R$.

Par ailleurs, les deux états d'hélicités 1 sont éliminés en considérant les contraintes suivantes:
(i) l'invariance de jauge $f^I\rightarrow f^I+Z\Lambda$ qui nous informe qu'un état décrit par la fonction $\Lambda(\lambda,\mu)$ est homogène de degré 0. Par conséquent il décrit un état bosonique d'hélicité 1
(ii) la contrainte $\partial_I f^I=0$ qui est homogène de degré 0 et qui décrit un état bosonique d'hélicité 1.

Il s'ensuit que pour le cas $\psi^A=0$; le spectre se constitue de:
2 états bosoniques d'hélicité 2.
4 états fermioniques d'hélicité $\frac{3}{2}$ se transformant en **4** de $SU(4)_R$.

Finalement, la collection totale des états décrits par le champ $f^I(Z)$, en tenant en compte aussi bien du moment angulaire associé à I que de l'invariance de jauge et des contraintes, est donné par[22]

$$
\begin{aligned}
\lambda_a f^a &: (2,\mathbf{1}),(\tfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{4}}),(\mathbf{1},\mathbf{6}),(\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\mathbf{4}),(\mathbf{0},\mathbf{1}) \\
\mu_{\dot a} f^{\dot a} &: (2,\mathbf{1}),(\tfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{4}}),(\mathbf{1},\mathbf{6}),(\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\mathbf{4}),(\mathbf{0},\mathbf{1}) \\
f^A &: (\tfrac{3}{2},\mathbf{4}),(\mathbf{1},\mathbf{15}\oplus\mathbf{1}),(\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\overline{\mathbf{20}}\oplus\bar{\mathbf{4}}) \\
&,\ (0,\mathbf{10}\oplus\mathbf{6}),(-\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\mathbf{4})
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

où le premier élément de chaque paire décrit l'hélicité quand au second, il correspond à la représentation de $SU(4)_R$. De plus les fonctions $\lambda_a f^a$ et $\mu_{\dot a} f^{\dot a}$ nous parviennent simplement des f^a et $f^{\dot a}$. En effet, les deux fonctions f^a et de même pour les deux $f^{\dot a}$ sont équivalentes aux fonctions invariantes de Lorentz $\lambda_a f^a$, $\frac{\partial f^{\dot a}}{\partial \lambda^a}$ pour f^a et $\mu_{\dot a} f^{\dot a}$, $\frac{\partial f^{\dot a}}{\partial \mu^a}$ pour $f^{\dot a}$. Par conséquent nous obtenons deux correspondants de degré 2 et deux de degré zéro qui s'associent respectivement, selon la règle de base, à 2 états bosoniques d'hélicité 2 et deux autres d'hélicité 1[9−13].

Cette analyse ne concerne que la fonction $f^I(Z)$. Dans ce qui suit, nous fixons l'intérêt sur la fonction $g_I(Z)$ en procédant de manière similaire.
$*$**Quand** $\psi^A = 0$; les scalaires de Lorentz $(Z^a g_a, Z^{\dot a} g_{\dot a}, \partial_a g^a, \partial_{\dot a} g^{\dot a})$ sont homogènes de degré $(0,0,-2,-2)$ puisque g_a et $g_{\dot a}$ sont homogènes de degré -1. Or, en considérant l'invariance de jauge $g_I \rightarrow g_I + \partial_I \Lambda$ ainsi que la contrainte $Z^I g_I = 0$, les deux champs de degré 0 sont éliminés. Ainsi, il reste deux champs twistoriels de degré -2 décrivant des états d'helicité 0 dans l'espace de Minkowski, sans oublier les champs g_A homogènes de poids -1 associés aux champs massifs d'hélicité $+\frac{1}{2}$.
$*$**Quand la dépendance du** ψ^A **intervient;** elle fait aboutir au spectre non massif complet décrit par g_I et qui se présente comme suit

$$
\begin{aligned}
\partial_a g^a &: (0,\mathbf{1}),(-\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{4}}),(-\mathbf{1},\mathbf{6}),(-\tfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\mathbf{4}),(-\mathbf{2},\mathbf{1}) \\
\partial_{\dot a} g^{\dot a} &: (0,\mathbf{1}),(-\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{4}}),(-\mathbf{1},\mathbf{6}),(-\tfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\mathbf{4}),(-\mathbf{2},\mathbf{1}) \\
g^A &: (\tfrac{1}{2},\bar{\mathbf{4}}),(\mathbf{0},\overline{\mathbf{10}}\oplus\mathbf{6}),(-\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\mathbf{20}\oplus\mathbf{4}) \\
&,\ (-1,\mathbf{15}\oplus\mathbf{1}),(-\tfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{4}})
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Les spectres présentés dans les éqs(4.19) et (4.20) montrent que les champs f et g ont les hélicités et les représentations de $SU(4)$ de valeurs conjuguées l'une de l'autre. Cette dualité sera explicitée par la suite via l'éq(4.52).

3. Modèle B dans $\mathbb{CP}^{3|4}$

L'objectif de cette sous-section est de reproduire les opérateurs vertex élucidés précédemment en traitant une autre version de la théorie des cordes twistorielle. Cette dernière concerne le modèle B dans le super espace twistoriel $\mathbb{CP}^{3|4}$ comme il est décrit dans[22].

a. Secteur de Yang-Mills D'après[16], les états de la corde ouverte du modèle B sont en étroite liaison avec les champs de jauge dans l'espace-temps. Plus encore, Penrose suggère qu'ils correspondent aux éléments de $H^1(\mathbb{CP}'^{3|4}, \mathcal{O})$[11] où le superespace $\mathbb{CP}'^{3|4}$ représente une région de $\mathbb{CP}^{3|4}$ dans laquelle les λ^a ne sont pas tout les deux nuls. Un élément de ce faisceau de groupe de cohomologie est représenté par une fonction d'onde qui satisfait les trois propriétés suivantes

1. $\tilde{\phi} = d\bar{Z}^{\bar I}\omega_{\bar I}(Z,\bar Z)$ autrement dit $\tilde\phi$ est une (0,1)-forme
2. $\bar\partial\tilde\phi = 0$
3. $\tilde\phi \rightarrow \tilde\phi + \bar\partial\alpha$ cette équivalence de jauge est vérifiée pour toute fonction α dans le superespace $\mathbb{CP}'^{3|4}$.

Il s'ajoute à ceci que les valeurs de $\tilde{\phi}$ ainsi que du paramètre de jauge α sont dans la représentation adjointe du groupe de jauge. Les démarches suivies dans[16] décrivent en détail les opérateurs vertex associés à ces états. L'un des résultats surprenants de[13] nous informe que dans l'espace twistoriel cette méthode de décrire les champs de jauge en utilisant le modèle B est reliée avec celle poursuivie dans la version de la corde ouverte traitée antérieurement. Par conséquent, l'auteur de[13] postule la formule suivante:

$$\tilde{\phi} = \phi\bar{\partial}(\vartheta(Im(z)) \tag{4.21}$$

où

$$\vartheta(Im(z) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \mathrm{Im(z)} > 0 \\ 0 & \text{pour} \quad \mathrm{Im(z)} < 0 \end{cases}.$$

Il s'ensuit de ceci le résultat suivant: *les opérateurs vertex décrivant les champs de Jauge dans la version théorie des cordes ouvertes twistorielles sont liés à ceux du modèle B dans $\mathbb{CP}^{3|4}$ par le biais de la transformation*

$$\tilde{\phi} \longrightarrow \phi$$

b. Secteur de supergravité conforme: Le mode de corde fermée le plus évident dans le modèle B est la déformation de la structure complexe de $\mathbb{CP}'^{3|4}$. Cette déformation doit préserver la forme volume holomorphe notée Ω. Ainsi, il faut donner le type des déformations possédant cette propriété. Pour cette cause, des ensembles d'ouverts U_i sont introduits de telle sorte qu'ils soient individuellement non déformés et qu'ils couvrent le superespace $\mathbb{CP}'^{3|4}$. Dans le cas de 2 ensembles ouverts; U_1 se caractérise par $\lambda^1 \neq 0$ alors que U_2 est défini pour $\lambda^2 \neq 0$. Au 1$^{\text{er}}$ ordre, la déformation se décrit via le difféomorphisme de la forme

$$Z^I \to Z^I + \epsilon f^I_{ij} \tag{4.22}$$

qui permet de rassembler les ensembles U_i dans leurs intersections U_{ij}. Dans (4.22), ϵ est un paramètre infinitésimal et $f_{ij} = -f_{ji}$. Puisque $f^I_{ij}\frac{\partial}{\partial Z^I}$ est un champ vectoriel holomorphe, alors les structures complexes de U_i et U_j sont égales au niveau de leur intersection. En plus f_{ij} doit être le volume préservant le champ de vecteur afin que la mesure Ω soit définie sur la variété déformée. De manière explicite, ceci s'interprète par la formule

$$\frac{\partial}{\partial Z^I} f^I_{ij} = 0.$$

Par conséquent les f décrivent un élément du faisceau du groupe $H^1(\mathbb{CP}'^{3|4}, T')$ où T' est un faisceau des volumes préservant les champs vectoriels.

Dans la cohomologie $\bar{\partial}$, un élément de ce groupe de cohomologie est décrit par la fonction d'onde

$$\hat{J} = d\bar{Z}^{\bar{I}} j^K_{\bar{I}}$$

qui obéit les critères suivants:

◇ $\bar{\partial}\hat{J} = 0$ autrement $\partial_{\bar{I}} j^K_{\bar{J}} - \partial_{\bar{J}} j^K_{\bar{I}} = 0$

◇ $\partial_K j^K_{\bar{J}} = 0$, ce qui signifie que $\hat{J}$ est une préservation de volume.

◇ $\hat{J} \to \hat{J} + \bar{\partial}\alpha$ est l'invariance de jauge usuelle valable pour toute section α de T'.

Par analogie aux résultats (4.21), il s'avère évident que la fonction $\hat{J}$ de ce modèle-B soit liée à l'objet lui correspondant de la corde ouverte. Cet objet n'est autre que f^K et la relation s'écrit

$$d\bar{Z}^{\bar{I}} j^K_{\bar{I}} = f^K \cdot \bar{\partial}(\vartheta(Im(z))). \tag{4.23}$$

L'opérateur vertex correspondant à $\hat{J}$ est de la forme

$$V_{\hat{J}} = \eta^{\bar{I}} \; j_{\bar{I}}^{K} \; \theta_K \tag{4.24}$$

où $\eta^{\bar{I}}$ et θ_K sont les fermions de la surface d'univers du modèle B.

Un autre résultat de la transformation de Penrose se résume par ce qui suit: un volume préservant la déformation de la structure complexe dans l'espace twistoriel décrit une solution des équations de Weyl anti-auto duale dans l'espace temps. Autrement il décrit une hélicité de la supergravité conforme. La référence[22] postule un autre type de mode de la corde fermée pour lequel l'opérateur vertex $b_{\bar{I}K}$ se couple aux D1-branes via

$$\int_{\mathbb{D}} b_{\bar{I}K} d\bar{Z}^{\bar{I}} \wedge dZ^K \tag{4.25}$$

où $\mathbb{D}$ est le volume d'univers d'une D1-brane. Dans ce modèle B,[22] impose à b les conditions suivantes:

* l'équation de mouvement $\bar{\partial} b = 0$

* l'invariance de jauge $b \to b + \bar{\partial}\lambda$.

Par conséquent, b est un élément de $H^1(\mathbb{CP}'^{3|4}, T^*)$ tel que T^* est le fibré cotangent.
De plus, le couplage (4.25) est invariant par la transformation:

$$b_{\bar{I}K} \to b_{\bar{I}K} + \partial_K \omega_{\bar{I}}, \tag{4.26}$$

ainsi b satisfait une troisième condition d'où la formule

$$d\bar{Z}^{\bar{I}} b_{\bar{I}K} = g_K \; \bar{\partial}(\vartheta(Im(z))) \tag{4.27}$$

qui relie b au champ de jauge abélien g de la corde ouverte twistorielle.
L'action effective postulée dans[22] s'écrit

$$\int_{\mathbb{CP}^{3|4}} d\bar{X}^{\bar{I}} d\bar{X}^{\bar{J}} d\bar{X}^{\bar{K}} \; b_{\bar{I}I} \; \partial_{\bar{J}} \; j_{\bar{K}}^{I} \Omega. \tag{4.28}$$

Les X^I sont des coordonnées locales complexes dans $\mathbb{CP}^{3|4}$ tel que les $\bar{X}^{\bar{I}}$ sont leurs complexes conjugués. Cette action effective est linéaire en j, or son extension non linéaire est donnée par

$$\int_{\mathbb{CP}^{3|4}} d\bar{X}^{\bar{I}} d\bar{X}^{\bar{J}} d\bar{X}^{\bar{K}} b_{\bar{I}I} \; N_{\bar{J}\bar{K}}^{I} \; \Omega \tag{4.29}$$

où $N_{\bar{J}\bar{K}}^{I}$ est le tenseur de Nijenhuis. Ce tenseur invariant est construit à partir de la structure presque complexe J. Cette dernière est un tenseur J_B^A contraint par la condition $J^2 = -1$ et dont les composantes $J_{\bar{J}}^{I}$ au 1^{er} ordre de perturbation de J coïncident avec les $j_{\bar{J}}^{I}$.
Dans ce cas, l'approximation linéaire de N est

$$N_{\bar{I}\,\bar{J}}^{K} = \partial_{\bar{I}} j_{\bar{J}}^{K} - \partial_{\bar{J}} j_{\bar{I}}^{K}$$

Notons que d'après le théorème [Penrose, Atiyah-Hitchin-Singer], *la structure prèsque complexe J est dite intégrable si et seulement si $N = 0$*. Dès lors, l'équation de mouvement de b déduite de l'action (4.29) affirme ce résultat $N = 0$.
Cette dernière condition $N = 0$ correspond, d'après la transformation de Penrose, à $W_{abcd} = 0$ dans l'espace de Minkowski. Les W_{abcd}, $W_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}$ sont les parties symétriques auto duale et anti auto duale du tenseur de Weyl. Il s'ensuit alors que l'interprétation de l'action (4.29) dans l'espace-temps n'est autre que l'action

$$\int d^4x \sqrt{g} U^{abcd} W_{abcd} \tag{4.30}$$

où U^{abcd} est le champ de Lorentz symétrique en tout ses indices de spin $(2,0)$ et qui correspond en partie au champ twistoriel b selon[22].

Dans le but de requérir la supergravité conforme, il faut tenir en compte une interaction U^2 provoquée par les D-instantons. L'action résultante

$$\int d^4x\sqrt{g}(U^{abcd}W_{abcd} - \frac{1}{2}\epsilon U^2) \tag{4.31}$$

est équivalente à celle de la gravité conforme après élimination de U qui donne

$$\frac{1}{2\epsilon}\int d^4x\sqrt{g}(W^{abcd}W_{abcd}). \tag{4.32}$$

Enfin, l'un des résultats principaux déduit de tout ce qui précède se résume dans les 3 équations suivantes:

1. $\tilde{\phi} = \phi\bar{\partial}(\vartheta(Im(z))$
2. $d\bar{Z}^{\bar{I}}j_{\bar{I}}^{K} = f^K \cdot \bar{\partial}(\vartheta(Im(z)))$.
3. $d\bar{Z}^{\bar{I}}b_{\bar{I}K} = g_K\ \bar{\partial}(\vartheta(Im(z))$
   qui permettent de relier, dans l'espace twistoriel, entre les opérateurs vertex de la corde ouverte (4.17,4.16) et ceux du modèle B (4.24).
   Par conséquent, quelque soit la théorie de départ: corde ouverte twistorielle ou bien modèle B $\mathbb{CP}^{3|4}$ dans le choix n'affecte pas les résultats aboutis qui seront similaires pour ces deux alternatives de corde twistorielle.

C. Identification des champs SGC et CT

Cette tranche est consacrée à vérifier que le secteur du singulet de jauge de la théorie des cordes twistorielle (CT) possède les mêmes états physiques que ceux de la supergravité conforme (SGC). En effet, les résultats du tableau qui donne les états physiques de la supergravité conforme $\mathcal{N} = 4$, $D = 4$ s'adaptent avec les résultats des équations (4.19) et (4.20) énonçant les champs de l'espace-temps décrits par les superchamps twistoriels f^I et g_I.

Au lieu de comparer les termes un à un, BW ont jugés plus illuminant d'admettre que le superchamp chiral $\mathcal{W}(x,\theta)$, qui constitue la variable de base de la supergravité conforme linéaire, coï ncide avec un champ qui lui soit similaire dans la corde twistorielle.

Pour cette raison; ayant déjà postulé le couplage du champ b au $D1-$brane de telle manière que la contribution de cette dernière soit proportionnelle à $exp(-\int_{\mathbb{D}} b)$, BW ont procédé comme suit :
1) Etendre ce qui précède en puissance de b.
2) Intégrer sur les modules. Ainsi, la partie de l'action effective quadratique en b, donnant le terme U^2, s'écrit

$$\frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}} d\mu\ (-\int_{\mathbb{D}} b)^2. \tag{4.33}$$

M est la composante de l'espace des modules des courbes dans $\mathbb{CP}^{3|4}$ qui contient $\mathbb{D}$. Le cas adéquat est lorsque $\mathbb{D}$ correspond à un instanton de degré 1, qui n'est autre qu'une copie de $\mathbb{CP}^1$ linéairement insérée dans le superespace twistoriel $\mathbb{CP}^{3|4}$. Or, la transformation de Penrose fait correspondre $\mathbb{D}$ à un point de l'espace-temps de Minkowski ou plus exactement à un point d'un superespace de Minkowski chiral ayant pour coordonnées $x^{a\dot{a}}$ et θ^{Aa}. Ainsi, une fonction de ce superespace est définit par:

$$\mathcal{W}(x,\theta) = \int_{\mathbb{D}_{x,\theta}} b \tag{4.34}$$

où $\mathbb{D}_{x,\theta}$ est la courbe de module x et θ.
Il s'ensuit alors que le développement de $\mathcal{W}$ par apport à θ s'exprime par :

$$\mathcal{W} = C + \cdots + \frac{1}{4!}\epsilon_{ABCD}\theta^{Aa}\theta^{Bb}\theta^{Cc}\theta^{Dd}U_{abcd} + \cdots \tag{4.35}$$

où C est un dilaton chiral.

D'autre part, dans l'approche de la théorie de la corde ouverte twistorielle, la forme de l'opérateur vertex $V_g = g_I(Z)\,\partial Z^I$ provoque le couplage $\int_{\partial D} g_I(Z)\,dZ^I$ entre le champ g et le bord ∂D de la surface d'univers D de la corde ouverte. Selon[22], lorsque ce bord est une ligne $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{RP}^{3|4}$, associée à un point dans le superespace réel de Minkowski de signature $++--$; alors le champ du superespace lui correspondant est défini par

$$\mathcal{W} = \int_{\mathbb{D}_{x,\theta}} g_I(Z)\,dZ^I. \tag{4.36}$$

Ce champ $\mathcal{W}(x,\theta)$ qui coïncide avec $\mathcal{W}$ de la supergravité conforme, fut introduit afin de donner une interprétation aux champs twistoriels dans l'espace-temps. Dans (4.36), $\mathbb{D}_{x,\theta}$ est défini via les équations twistorielles

$$(\mu^{\dot a}, \psi^A) = (x^{a\dot a}\lambda_a, \theta^{Aa}\lambda_a) \tag{4.37}$$

où les variables sont réelles.
De manière explicite, $\mathcal{W}(x,\theta)$ s'écrit

$$\mathcal{W}(x,\theta) = \int d\lambda^a\,\left[g_a(Z) + x_{a\dot a}g^{\dot a}(Z) + \theta_a^A g_A(Z)\right] \tag{4.38}$$

tel que dZ^I est évaluée en utilisant

$$(d\lambda^a, d\mu^{\dot a}, d\psi^A) = (d\lambda^a, d\lambda_b x^{b\dot a}, d\lambda_c\theta^{cA})$$

pour des Z^I dans $\mathbb{D}_{x,\theta}$. Ceci signifie que ces Z^I sont assimilées à des fonctions de λ^a pour x et θ fixées via les équations twistorielles (4.37).

A partir de l'action dans le super espace (4.3), l'équation de mouvement concernant $\mathcal{W}$ s'écrit

$$\epsilon^{ABCD}D_C^a D_{Ea} D_{bD} D_F^b \mathcal{W} = 0 \tag{4.39}$$

qui est équivalente à $\Delta_{AB}\Delta_{CD}\mathcal{W} = 0$ avec $\Delta_{AB} = D_{Aa}D_B^a$.

L'équation de mouvement (4.39) est satisfaite par toute fonction $\mathcal{W}$ du superespace s'exprimant en termes d'un champ twistoriel g_I via (4.36) ou bien (4.38). Ainsi La partie suivante est destinée à décrire les trois étapes permettant de déterminer le champ twistoriel g_I en termes du superchamp $\mathcal{W}(x,\theta)$.

c. <u>La forme de $g_{\dot a}$</u>: La formule (4.36) implique:

$$\begin{aligned}\partial^\mu\partial_\mu\mathcal{W} &= \int d\lambda^a\,(\partial^\mu\partial_\mu)\,x_{a\dot a}g^{\dot a}(\lambda, x\lambda, \theta\lambda) \\ &= \int d\lambda^a\lambda_a\partial_{\dot a}g^{\dot a}.\end{aligned} \tag{4.40}$$

En utilisant les champs dipôles ainsi que le développement de $\mathcal{W}$ présenté dans (4.1), il résulte

$$\begin{aligned}\partial_{\dot a}g^{\dot a}(Z) &= \hat{C}_0' + \psi^A\hat{\Lambda}'_{-\frac12 A} + (\psi^2)_{[AB]}\hat{T}'^{[AB]}_{-1} \\ &+ (\psi^3)_A\hat{\eta}'^A_{-\frac32} + \psi^4\hat{e}'_{-2}\end{aligned} \tag{4.41}$$

où $\hat{C}_0'$ est le champ twistoriel de $GL(1)$ portant la charge -2 correspondant au champ C_0' de l'espace-temps ayant une hélicité zéro. En plus, $\hat{\Lambda}'_{-\frac12 A}$ n'est autre que le champ twistoriel de $GL(1)$ de charge -3 dont $\Lambda'_{-\frac12 A}$ est le champ de l'espace-temps associé et qui porte une hélicité $-\frac12$, ainsi de suite.

Afin d'obtenir $g^{\dot a}$ à partir de (4.41), il est indispensable d'employer la description des champs twistoriels dans l'espace des moments usuelle où $g^{\dot a}$ dépend de $\mu_{\dot a}$ par le biais du terme $\delta(\pi^a\lambda_a)\exp(i\mu^{\dot a}\bar\pi_{\dot a}(\frac{\pi^1}{\lambda^1}))$ avec

* $k^{a\dot{a}} = \pi^a \bar{\pi}^{\dot{a}}$ représente le moment
* $\left(\frac{\pi^1}{\lambda^1}\right)$ est un covariant de Lorentz.

Par conséquent

$$\partial_{\dot{a}} g^{\dot{a}} = i(\frac{\pi^1}{\lambda^1})\tilde{\pi}^{\dot{a}} g_{\dot{a}}. \tag{4.42}$$

L'invariance de jauge $\delta g_I = \partial_I \Omega$ permet de choisir la jauge. Ainsi il se déduit

$$\begin{aligned} g_{\dot{a}}(Z) = & -i\frac{\lambda^a \sigma^0_{a\dot{a}}}{k^0}(\hat{C}'_0 + \psi^A \hat{\Lambda}'_{-\frac{1}{2}A} + (\psi^2)_{[AB]}\hat{T}'^{[AB]}_{-1}) \\ & + (\psi^3)_A \hat{\eta}'^A_{-\frac{3}{2}} + \psi^4 \hat{e}'_{-2}). \end{aligned} \tag{4.43}$$

d. L'expression de g_A: Il est clair que (4.36) implique

$$\sigma^\mu_{a\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \theta^A_a} \partial_\mu \mathcal{W} = \int d\lambda^a \lambda_a (\partial_A g_{\dot{a}}(\lambda, x\lambda, \theta\lambda) \tag{4.44}$$

$$- \partial_{\dot{a}} g_A(\lambda, x\lambda, \theta\lambda)). \tag{4.45}$$

En comparant ce résultat à (4.1) et (4.11) et en utilisant le fait que

$$\partial_{\dot{a}} g_A = i(\frac{\pi^1}{\lambda^1})\tilde{\pi}^{\dot{a}} g_A, \tag{4.46}$$

l'expression de g_A résultante prend la forme

$$\begin{aligned} g_A(Z) = & \hat{\Lambda}_{\frac{1}{2}A} + \psi^B \hat{T}_{0[AB]} + \psi^B \hat{E}_{0(AB)} \\ & + (\psi^2)_{[AB]}\hat{\eta}^B_{-\frac{1}{2}} + (\psi^2)_{[AB]}\hat{\xi}^{[BC]}_{-\frac{1}{2}A} + \\ & + (\psi^3)_A \hat{e}_{-1} + (\psi^3)_B \hat{V}^B_{-1A} + \psi^4 \hat{\overline{\eta}}_{-\frac{3}{2}A}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

e. La détermination de g_a: Il reste à déterminer g_a. Pour cette raison, il faut utiliser encore une fois (4.36) qui relie g_a à $\mathcal{W}$ suivant la relation

$$\int d\lambda^a g_a = \mathcal{W} - \int d\lambda^a \left[x_{a\dot{a}} g^{\dot{a}} + \theta^A_a g_A\right]. \tag{4.48}$$

Par la suite,

$$\begin{aligned} g_a(Z) = & \lambda_a(\hat{C}_0 + \psi^A \hat{\Lambda}_{-\frac{1}{2}A} + (\psi^2)_{[AB]}\hat{T}^{[AB]}_{-1} \\ & + (\psi^3)_A \hat{\eta}^A_{-\frac{3}{2}} + \psi^4_{-2}\hat{e}_{-2}) + ... \end{aligned} \tag{4.49}$$

où ... dépendent des champs qui apparaissent dans $g_{\dot{a}}$ et g_A.

En conclusion, les équations (4.43), (**??**) et (4.49) permettent de décrire g_I en terme des composantes du développement de $\mathcal{W}(x, \theta)$.

Cette même procédure relie également le superchamp antichiral $\overline{\mathcal{W}}(x + \theta\bar{\theta}, \bar{\theta})$ au champ dual $\tilde{g}^I(\bar{Z})$

$$\overline{\mathcal{W}}(\hat{x}, \bar{\theta}) = \int d\bar{Z}_I \tilde{g}^I(\bar{Z}|_{\bar{\mu}^a = \hat{x}^{a\dot{a}}\bar{\lambda}_{\dot{a}}, \bar{\psi}_A = \bar{\theta}^{\dot{a}}_A \bar{\lambda}_{\dot{a}}}) \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned} = & \int d\bar{\lambda}^{\dot{a}}(\tilde{g}_{\dot{a}}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\psi}) + \hat{x}_{a\dot{a}}\tilde{g}^a(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\psi}) \\ & + \bar{\theta}_{\dot{a}A}\tilde{g}^A(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\psi})) \end{aligned} \tag{4.51}$$

où $\hat{x}^{a\dot{a}} = x^{a\dot{a}} + \theta^{aA}\bar{\theta}^{\dot{a}}_A$.

f. Le champ f^I: Dans ce qui précède nous avons signalé que les résultats présentés dans (4.19) et (4.20) montrent que les champs non massifs provenant de g_I possèdent des hélicités opposées et des représentations de $SU(4)_R$ conjuguées en les comparant à ceux de f^I. Ceci signifie qu'il existe une dualité entre f et g qui se traduit en définissant la transformation de Fourier

$$\tilde{g}^I(V) = \int_{\mathbb{RP}^{3|4}} d\Omega \exp(Z^K V_K) f^I(Z). \tag{4.52}$$

où V_K sont les coordonnées homogènes sur un nouveau $\mathbb{RP}^{3|4}$ qui est dual au superespace d'origine et $d\Omega$ est la mesure exprimée par $\lambda^a d\lambda_a \; d^2\mu \; d^4\psi$.

En profitant du résultat (4.52) qui exprime le champ f^I en terme de $\tilde{g}^I$, (4.50) mène aux expressions suivantes

$$\begin{aligned}
\lambda^a f_a(Z) &= \hat{\varsigma}'_{-2} + \psi^A \hat{\hat{\eta}}'_{-\frac{3}{2}A} + (\psi^2)_{[AB]} \hat{\hat{T}}'_{-1[AB]} + (\psi^3)_A \hat{\hat{\Lambda}}'_{-\frac{1}{2}A} + \psi^4 \hat{\hat{C}}'_0 \\
f^A(Z) &= \hat{\eta}_{\frac{3}{2}A} + \psi^B \hat{V}^B_{1A} + \psi^B \hat{e}_1 + (\psi^2)_{[AB]} \hat{\hat{\xi}}^{[BC]}_{\frac{1}{2}A} + (\psi^2)_{[AB]} \hat{\hat{\eta}}^B_{\frac{1}{2}} + (\psi^3)_A \hat{\hat{E}}_{0(AB)} \\
&\quad + (\psi^3)_B \hat{\hat{T}}_{0[AB]} + \psi^4 \hat{\hat{\Lambda}}_{\frac{-1}{2}A} \\
f_{\dot{a}}(Z) &= \partial(\hat{\varsigma}'_2 + \psi^A \hat{\hat{\eta}}'^{A}_{\frac{3}{2}} + (\psi^2)_{[AB]} \hat{\hat{T}}'^{[AB]}_1 + (\psi^3)_A \hat{\hat{\Lambda}}'_{\frac{1}{2}A} + \psi^4 \hat{\hat{C}}_0) + \ldots
\end{aligned}$$

où $\partial_a = \frac{\partial}{\partial \lambda^a}$, $\partial_{\dot{a}} = \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}}$ et $\ldots$ dépend des champs qui apparaissent dans f_a et f^A.

Nous avons finalement démontré que les champs de l'espace-temps décrits par les superchamps twistoriels contiennent des états physiques de la théorie de supergravité conforme $\mathcal{N} = 4$ $D = 4$. De ce fait, nous retrouvons une autre confirmation de la relation entre l'espace twistoriel et l'espace de Minkowski.

V. CONCLUSION

Ce papier a défilé plusieurs idées concernant les twisteurs ainsi que des sujets récents qui leur sont liés. Cette tentative qui avait pour but de connecter entre le passé et l'actuel, a présenté tout d'abord une étude concernant les twisteurs, l'espace qui leur est associés ainsi que son extension supersymétrique, tout en introduisant les courbes algébriques dans ces espaces. Ayant exhibé tout le matériel mathématique nécessaire, la suite était consacrée à la théorie des cordes twistorielles. Cette dernière repose sur l'union entre la géométrie twistorielle et la géométrie de la supervariété $\mathbb{CP}^{3|4}$ qui est simultanément un espace supertwistoriel et une supervariété de Calabi-Yau. Ainsi jouant le rôle des espaces cibles de la théorie, l'extension de la dualité miroir à la supergéométrie a également été traitée. De cette conjecture, nous avons présenté quelques exemples des variétés de Calabi-Yau dualles par la symétrie miroir qui constituent un intérêt particulier dans l'étude des théories de cordes. Dans leur version twistorielle; nous avons la corde ouverte twistorielle ainsi que le modèle B dans $\mathbb{CP}^{3|4}$. Au bout de ces deux alternatives, nous avons retrouvé le spectre non massif de la supergravité conforme $\mathcal{N} = 4, D = 4$. Ce résultat constitue une nouveauté inattendue puisque c'est la corde ouverte twistorielle qui produit les états physiques semblables à ceux de la supergravité conforme $\mathcal{N} = 4$ à quatre dimensions.

Ayant jugé intéressant d'aller au delà de l'analyse des opérateurs vertex dans le superespace $\mathbb{CP}^{3|4}$, une bonne partie de cet article s'est destinée à interpréter ce spectre obtenu dans l'espace-temps $\mathbb{R}^{1,3}$. L'idée qui a permis ce passage se résume dans le fait qu'une fonction de coordonnées homogènes Z^I de degré k de l'espace twistoriel décrit un état non massif dans l'espace-temps de Minkowski portant une hélicité $(1 + \frac{k}{2})$.

Acknowledgement The authors would like to thank R. Ahl Laamara and A. Belhaj for earlier collaboration on this matter. They also thank Protars III D12/25 CNR for support.

VI. REFERENCES

[1] R. Penrose, Twistor Algebra, J.Math.Phys.8 (1967) 345.

[2] R. Penrose, The Central Programme Of Twistor Theory, Chaos, Solitons, and Fractals 10 (1999) 581.
[3] R. Penrose et W. Rindler, Spinors And Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields, Volume 2, Spinor And Twistor Methods In Spacetime Geometry (Cambridge University Press, 1986).
[4] R.Penrose; The twistor program, Rept.Math.Phys. 12, 65 (1977)
[5] R. S. Ward et R. O Jr. Wells, Twistor Geometry And Field Theory (Cambridge University Press, 1991).
[6] L. P. Hughston, Twistors and Particles, Lecture Notes in Physics 97 (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
[7] T. N. Bailey et R. J. Baston, eds., Twistors In Mathematics And Physics, London
[8] S. A. Huggett et K. P. Tod, An Introduction To Twistor Theory, London Mathematical Society Student Texts 4.Mathematical Society Lecture Notes Series 156 (1990).
[9] R. Penrose, Twistor Quantization And Curved Spacetime, Int. J. Theor. Phys. 1 (1968) 61.
[10] R. Jozsa, Applications of sheaf cohomology in twistor, A dissertation submitted in partial fulfilment of the requirement for the degree of Master of Science, 1976
[11] M. A. H. MacCallum et R. Penrose, Twistor Theory: An Approach To The Quantization Of Fields And Space-Time, Phys. Rept. 6C (1972) 241.
[12] A. P. Hodges et S. Huggett, Twistor Diagrams, Surveys In High Energy Physics (1980) 333; A. Hodges, Twistor Diagrams, Physica 114A (1982) 157, Twistor Diagrams, in The Geometric Universe: Science, Geometry, The Work Of Roger Penrose, eds. S. A. Huggett et. al. (Oxford University Press, 1998).
[13] M. F. Atiyah, Geometry Of Gauge Fields, Lezioni Fermiane (Academia Nazionale dei Lincei and Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979).
[14] A. Ferber, Supertwistors And Conformal Supersymmetry, Nucl. Phys. B132 (1978)55.
[15] C. R. Lebrun; Geometry of Twistor spaces, Simons workshop lecture; july 2004
[16] E. Witten, Perturbative Gauge Theory as a String Theory in Twistor Space, Commun.Math.Phys. 252 (2004) 189-258, hep-th/0312171.
[17] F. Cachazo et P.Svrcek, Lectures on Twistor Strings and Perturbative Yang-Mills Theory, PoS RTN 2005 (2005) 004, hep-th/0504194
[18] S. Sethi, Supermanifolds, Rigid Manifolds and Mirror Symmetry, Nucl.Phys. B430 (1994) 31-50, hep-th/9404186
[19] M. Wolf, Twistor Geometry and Gauge theory, lecture notes: Introductory course on twistor geometry and gauge theory given at the Modave Summer School on mathematical physics in June 2005
[20] N. Berkovits, An Alternative String Theory in Twistor Space for N=4 Super-Yang-Mills, Phys.Rev.Lett. 93 (2004) 011601, hep-th/0402045
[21] N. Berkovits et L. Motl, Cubic Twistorial String Field Theory, JHEP 0404 (2004) 056, hep-th/0403187
[22] N.Berkovits et E.Witten, Conformal Supergravity in twistor-string theory, JHEP 0408 (2004) 009, hep-th/0406051.
[23] N.Nekrasov, H. Ooguri et C. Vafa, S-duality and Topological Strings, JHEP 0410 (2004) 009, hep-th/0403167.
[24] I. Bars, Twistors and 2T-physics; hep-th/0502065.
[25] M. Aganagic et C. Vafa, Mirror Symmetry and Supermanifolds, hep-th/0403192.
[26] K. Hori, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R.Vakiland et E. Zaslow, Mirror Symmetry, vol. 1 of Clay Mathematics Monographs, AMS, Providence, RI 2003.
[27] K. Hori et C. Vafa, Mirror symmetry, hep-th/0002222.
[28] A.Neitzke et C.Vafa, N=2 strings and the twistorial Calabi-Yau, hep-th/0402128
[29] C. Vafa, Topological Mirrors and Quantum Rings, in S.T. Yau (ed.): Mirror symmetryI, 121 hep-th/9111017.
[30] M. Aganagic et C. Vafa, Perturbative Derivation of Mirror Symmetry, hep-th/0209138.
[31] J. Park et S-J. Rey, Supertwistor orbifolds: Gauge theory amplitudes and topological strings, JHEP 12 (2004) 017 hep-th/0411123.
[32] S. Giombi, Orbifolding the twistor string, Nucl. Phys. B 719 (2005) 234-252 hepth/0411171.
[33] A. D. Popov, C. Sămann, et M. Wolf, The topological B-model on a mini-supertwistor space and supersymmetric Bogomolny monopole equations, JHEP 10 (2005) 058, hep-th/0505161.
[34] G. Policastro; Twistor Spaces, Mirror Symmetry and Self-dual Kahler Manifolds, Contribution to the proceedings of the Workshop “Supersymmetries and Quantum Symmetries, 27-31 July 2005, JINR, Dubna, Russia.
[35] R. Ricci, Super Calabi-Yau's and special lagrangians, hep-th/0511284.
[36] M. Rŏcek et N. Wadhwa, On Calabi-Yau supermanifolds I, hep-th/0408188.
[37] M. Rŏcek et N. Wadhwa, On Calabi-Yau supermanifolds. II, hep-th/0410081.
[38] S. P. Kumar et G. Policastro, Strings in twistor superspace and mirror symmetry, Phys.Lett. B 619 (2005) 163-170 hep-th/0405236.
[39] C.-H. Ahn, Mirror symmetry of Calabi-Yau supermanifolds, Mod. Phys. Lett. A 20 (2005) 407-418 hep-th/0407009.
[40] C. Sămann, On the mini-superambitwistor space and N = 8 super Yang- Mills theory, hep-th/0508137.
[41] R. Ahl Laamara, A. Belhaj, L. B. Drissi, E. H. Saidi, On Local Calabi-Yau Supermanifolds and Their Mirrors, J.Phys. A39 (2006) 5965-5978 hep-th/0601215

[42] A. Belhaj, L. B. Drissi, J. Rasmussen, E. H. Saidi, A. Sebbar, Toric Calabi-Yau supermanifolds and mirror symmetry, J.Phys. A38 (2005) 6405-6418, hep-th/0410291.
[43] P. van Nieuwenhuizen, Supergravity as a Yang-Mills theory, (YITP, Stony Brook), Contribution to 50 Years of Yang-Mills Theory, World Pub. Co., G. 't Hooft editor. hep-th 0408137
[44] W. Siegel, On-Shell O(N) Supergravity in Superespace Nucl.Phys.B177:325, 1981.
[45] S. Ferrara et B. Zumino, Structure of Linearized Supergravity and Conformal Supergravity, Nucl. Phys. B134 (1978) 301.
[46] J. M. Maldacena, The large N limit of superconformal field theories and supergravity, Adv.Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231-252 hep-th/9711200.
[47] L. Dolan, C.R. Nappi, E. Witten, Yangian Symmetry in $D = 4$ Superconformal Yang-Mills Theory, hep-th/0401243.