African Journal Of Mathematical Physics Volume **4** *(2007)103-115*

Approche Hamiltonienne des Systmes des 2- Formes

A.Awane and A. Chkiriba

Equipe de Geometrie Differentielle et Applications,
Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca-Morocco
Corresponding author: a.awane@yahoo.fr

Abstract

We give various aspects of Hamilonian mappings associated to the $k-$symplectic structures and also to a non degenerate systems of closed two forms.

Keywords: Hamiltonian systems, symplectic structures. Generalized Hamiltonian Dynamics of Nambu. **MSC (2000).** MSC 2000 : 53D10, 53D17, 70Hxx, 70Hxx.

I. INTRODUCTION

L'une des motivations principales qui ont conduit à introduire la géométrie $k-$symplectique en tant qu'extension de la géométrie de polarisation[7], est de proposer un support géométrique des équations de Nambu-Hamilton[13], à l'instar du formalisme hamiltonien classique, qui est une géométrie de l'espace de phase (fibré tangent TM, d'une variété différentiable M, muni de la forme de Liouville λ).

Les équations de Hamilton

$$\frac{dx^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y^i}, \quad \frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x^i}$$

proviennent de la dualité $X \longmapsto i(X)\theta$, entre les fibrés des repères et des corepères, où $\theta = d\lambda$; et que les applications hamiltoniennes H sont à valeurs réelles et sont reliées aux systèmes hamiltoniens X_H par la relation :

$$i\left(X_H\right)\theta = -dH.$$

Les équations de Nambu-Hamilton régissant le mouvement de la mécanique statistique de Nambu en dimension 3 sont données par :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(y,z)} \ , \ \frac{dy}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(z,x)} \ , \ \frac{dz}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(x,y)} \tag{1.1}$$

où H et G sont deux fonctions réelles définies sur l'espace de phase M décrit par le système de coordonnées (x, y, z).

Dans cette optique, la géométrie $k-$symplectique propose une structure géométrique dans laquelle cohabitent des $2-$formes différentielles fermées $\theta^1, \ldots, \theta^k$, de telle sorte que les applications hamiltoniennes H soient à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, et dont les composantes H^p soient liées au systèmes hamiltoniens X_H par les relations :

$$i\left(X_H\right)\theta^p = -dH^p,$$

afin de retrouver les équations de Nambu-Hamilton tout en conservant les traits spécifiques de la géométrie symplectique classique.

Une structure $k-$symplectique est un $(k+1)-$uplet $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$ dans lequel $\theta^1, \ldots, \theta^k$ forment un système non dégénéré s'annulant sur les champs tangents aux feuilles. Le théorème de Darboux montre que tout point x_0 de M possède un voisinage ouvert de coordonnées locales $(x^{pi}, x^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ tel que les formes différentielles θ^p soient représentées dans U par

$$\theta^p_{|U} = \sum_{i=1}^{n} dx^{pi} \wedge dx^i$$

et le sous-fibré E soit défini par les équations $dx^1 = \ldots = dx^n = 0$.

Depuis son introduction en 1984 ([1]), la géométrie $k-$symplectique a connu beaucoup de développements ([2],[4],[7]), comme elle a joué le support la quantification géométrique de Kostant-Souriau-Puta ([15]) et elle fut utilisée dans les travaux de M. de Léon[8], Michael McLean et L.K. Norris[14], P.R. Rodriguez[16], Angel Rey Roca et Modesto Salgado et I.V. Kanachikov[10].Systèmes hamiltoniens $k-$symplectiques.

Soit M une variété différentiable de dimension $p+q$ muni d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension q. Le sous fibré de TM défini par les vecteurs tangents aux feuilles de $\mathfrak{F}$ sera désigné par E, l'ensemble des sections du $M-$fibré $TM \longrightarrow M$ (resp.$E \longrightarrow M$) sera désigné par $\mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ (resp.$\Gamma(E)$) et l'ensemble des $r-$formes différentiables sur M sera désigné par $\mathfrak{U}^{\mathfrak{r}}(\mathfrak{M})$.

Une fonction réelle f de classe C^∞ sur M est dite *basique* pour $\mathfrak{F}$ si, pour toute $Y \in \Gamma(E)$, la dérivée $Y(f)$ de f suivant Y est identiquement nulle. L'ensemble des fonctions basiques pour $\mathfrak{F}$ sera désigné par $\mathfrak{U}^{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$ est un sous anneau de $\mathfrak{U}^{\mathfrak{o}}(\mathfrak{M})$ des fonctions réelles différentiables. Rappelons ([12]) qu'une fonction différentiable $f \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{o}}(\mathfrak{M})$ est basique si et seulement si f est constante sur chaque feuille de $\mathfrak{F}$.

Dans ce travail, nous mettons en évidence différents types de systèmes hamiltoniens et d'applications hamiltoniennes dans le cadre d'une structure $k-$symplectique, et nous montrons aussi que l'ajout du feuilletage dans cette structure n'est pas le seul facteur qui entraîné la forme restrictive des applications hamiltoniennes $k-$symplectiques.

A. Systèmes hamiltoniens $k-$symplectiques

Rappelons qu'une structure $k-$symplectique sur une variété différentiable M de dimension $n(k+1)$ est un $(k+1)-$uplet $\left(\theta^1, ..., \theta^k; E\right)$, tel que, pour tout $x \in M$, les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $C_x\left(\theta^1\right) \cap ... \cap C_x\left(\theta^k\right) = \{0\}$

(ii) $\theta^p(X,Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(E)$ et $p(p = 1, ..., k)$.

Rappelons aussi ([2],[7]), que si $\left(\theta^1, ..., \theta^k; E\right)$ est une structure $k-$symplectique sur M, alors, pour tout point x de M, il existe un voisinage ouvert U de M contenant x de coordonnées locales $(x^{pi}, x^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$, dites adaptées, tel que les formes différentelles θ^p soient représentées dans U par :

$$\theta^p_{|U} = \sum_{i=1}^{n} dx^{pi} \wedge dx^i$$

et le sous fibré E soit défini par les équations $dx^1 = ... = dx^n = 0$.

Soit M une variété différentiable de dimension $n(k+1)$ munie d'une structure $k-$symplectique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$

Soit $j : \mathfrak{X}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{f}^1(\mathfrak{M}) \times \ldots \times \mathfrak{f}^1(\mathfrak{M})$ définie par :

$$j(X) = (j^1(X), \ldots, j^k(X)) = (i(X)\theta^1, \ldots, i(X)\theta^k)$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$.

Un champ de vecteurs X sur M est appelé automorphisme infinitésimal de $\mathfrak{F}$ (ou de E) si au voisinage de tout point de M, le groupe à un paramètre local associé à X respecte le feuilletage $\mathfrak{F}$.

Pour tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

Proposition I.1 *i)* X *est un automorphisme infinitésimal pour* $\mathfrak{F}$,

ii) $[X, Y] \in \Gamma(E)$ *pour tout* $Y \in \Gamma(E)$.

iii) Dans un système de coordonnées locales distinguées

$$(x_u, x^i)_{1 \leq u \leq nk,\ 1 \leq i \leq n},$$

le champ de vecteurs X *prend la forme*

$$X = \sum_{s=1}^{nk} \xi^s(x_1, \ldots, x_{nk}, x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial}{\partial x_s} + \sum_{t=1}^{n} \eta^t(x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^t}.$$

On notera $\mathcal{I}(\mathcal{M}, \mathfrak{F})$ l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux pour $\mathfrak{F}$.

Un champ de vecteurs X sur M est appelé système hamiltonien si X est un automorphisme infinitésimal pour $\mathfrak{F}$ et pour les $2-$formes θ^p à la fois; autrement dit, s'il satisfait les conditions suivantes :

Dfinition I.1 *1.* X *est un automorphisme infinitésimal pour* $\mathfrak{F}$,

2. les formes de Pfaff $i(X)\theta^1, \ldots, i(X)\theta^k$ *sont fermées.*

Le champ de vecteurs X *sera appelé automorphisme infinitésimal pour la structure* k*-symplectique* $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$.

Soit X un système hamiltonien. Il résulte du lemme de Poincaré, que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de M contenant x et une application différentiable H de U dans $\mathbb{R}^k$ vérifiant sur U la relation

$$j(X) = -dH.$$

Inversement, si H est une application différentiable de M dans $\mathbb{R}^k$ telle que $dH \in j(\mathcal{I}(\mathcal{M}, \mathfrak{F}))$, il existe un unique champ de vecteurs sur M noté X_H, et appelé système hamiltonien associé à H, tel que $j(X_H) = -dH$.

Les applications différentiables H de M dans $\mathbb{R}^k$ telles que $dH \in j(\mathcal{I}(\mathcal{M}, \mathfrak{F}))$ sont appelées applications hamiltoniennes de la structure k-symplectique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$.

Soit $H = (H^p)_{1 \leq p \leq k}$ une application hamiltonienne et X_H le système hamiltonien associé. Dans un ouvert U de M muni d'un système de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, x^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$, les composantes H^p de H et X_H s'écrivent respectivement :

$$H^p = \sum_{j=1}^{n} f_j(x^1, \ldots, x^n)x^{pj} + g^p(x^1, \ldots, x^n)$$

et

$$X_H = -\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x^s}(x^1, \ldots, x^n)x^{ps} + \frac{\partial g^p}{\partial x^s}(x^1, \ldots, x^n)\right)\frac{\partial}{\partial x^{ps}}$$
$$+\sum_{s=1}^{n} f_s(x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^s}$$

où f_j et g^p sont des fonctions différentiables dans U.

Supposons que $k \geq 2$. Il résulte du théorème précédent que si les formes de Pfaff $i(X)\theta^1, \ldots, i(X)\theta^k$ sont fermées, X est nécessairement un automorphisme infinitésimal pour $\mathfrak{F}$.

Soient H, K deux applications hamiltoniennes et X_H, X_K les systèmes hamiltoniens associés. Le crochet $[X_H, Y_K]$ est un système hamiltonien. Plus précisément l'application notée $\{H, K\}$ de M dans $\mathbb{R}^k$ définie par:

$$\{H, K\} = +(\theta^1(X_H, X_K), \ldots, \theta^k(X_H, X_K))$$

satisfait

$$[X_H, X_K] = X_{\{H,K\}}.$$

Soit $\mathfrak{H}(\mathfrak{M})$ l'ensemble des applications hamiltoniennes de la structure k-symplectique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$. La correspondance $(H, K) \longmapsto \{H, K\}$ de $\mathfrak{H}(\mathfrak{M}) \times \mathfrak{H}(\mathfrak{M})$ dans $\mathfrak{H}(\mathfrak{M})$ est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire antisymétrique satisfaisant l'identité de Jacobi.

Proposition I.2 $(\mathfrak{H}(\mathfrak{M}), \{,\})$ *est une algèbre de Lie réelle de dimension infinie.*

B. Lien avec la mécanique statistique de Nambu.

Munissons l'espace $M = \mathbb{R}^3$ de la structure 2−symplectique canonique $\left(\theta^1, \theta^2; E\right)$ définie par

$$\begin{cases} \theta^1 = dx \wedge dy \\ \theta^2 = dy \wedge dz \\ E = ker dz. \end{cases}$$

Les applications hamiltoniennes de la structure 2−symplectique sont les applications du type

$$H : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dont les composantes sont données par

$$H^1 = f(z)\,x + g^1(z), \quad H^2 = f(z)\,y + g^2(z)$$

où f, g^1, g^2 sont des fonctions différentiables basiques définies sur l'espace M. Les trajectoires du système hamiltonien X_H de la structure 2−symplectique sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\partial H^1}{\partial z} \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial H^2}{\partial z} \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial H^1}{\partial x} = \dfrac{\partial H^2}{\partial y}. \end{cases}$$

Proposition I.3 *Soient* $H = \left(H^1, H^2\right)$ *avec* $H^1 = f(z)\,x + g^1(z)$ *et* $H^2 = f(z)\,y + g^2(z)$, *une application hamiltonienne de la structure* 2−*symplectique. Alors le système hamiltonien* X_H *et le système dynamique de Nambu* X_H^n *sont liés par la relation*

$$X_H^n = f(z)\,X_H.$$

Cela résulte directement des relations suivantes :

$$\frac{D\left(H^1, H^2\right)}{D(y,z)} = -f(z)\frac{\partial H^1}{\partial z}, \quad \frac{D\left(H^1, H^2\right)}{D(z,x)} = -f(z)\frac{\partial H^2}{\partial z}$$
$$\frac{D\left(H^1, H^2\right)}{D(x,y)} = -f(z)\frac{\partial H^1}{\partial x} = -f(z)\frac{\partial H^2}{\partial y}.$$

Corollaire I.1 *Si $f(z) \neq 0$, la fonction*

$$(f(z))^{-1} H = \left(x + h^1(z), y + h^2(z)\right)$$

avec $h^1(z) = (f(z))^{-1} g^1(z)$ et $h^2(z) = (f(z))^{-1} g^2(z)$ est une solution des équations du mouvement de la mécanique statistique de Nambu.

C. Exemples de champs hamiltoniens associés à un système de $2-$formes

L'exemple suivant montre que l'ajout du feuilletage dans la structure $k-$symplectique n'est pas la cause principale qui a implosé la forme restrictive locale des applications hamiltoniennes.

Considérons le corps dans $\mathbb{R}^4$ les formes de Pfaff $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ définies par :

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + x_3 dx_4 - x_4 dx_3 \\ \lambda^2 &= x_1 dx_3 - x_3 dx_1 - x_2 dx_4 + x_4 dx_2 \\ \lambda^3 &= x_1 dx_4 - x_4 dx_1 + x_2 dx_3 - x_3 dx_2. \end{aligned}$$

Et considérons $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ les $2-$formes différentielles définies par :

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \frac{1}{2} d\lambda^1 = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \\ \theta^2 &= \frac{1}{2} d\lambda^2 = dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4 \\ \theta^3 &= \frac{1}{2} d\lambda^3 = dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Proposition I.4 *Soit $H = (H_1, H_2, H_3) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3\right)$ s'il existe un champ de vecteurs*

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + X_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

tels que :

$$\begin{cases} i(X_H)\theta^1 = -dH^1 \\ i(X_H)\theta^2 = -dH^2 \\ i(X_H)\theta^3 = -dH^3 \end{cases}$$

alors on a

$$\begin{aligned} H^1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + k_1 \\ H^2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -dx_1 - cx_2 + bx_3 + ax_4 + k_2 \\ H^3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 + k_3 \end{aligned}$$

et X est un champ de vecteurs constant défini par :

$$X_H = -b \frac{\partial}{\partial x_1} + a \frac{\partial}{\partial x_2} - d \frac{\partial}{\partial x_3} + c \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

En effet, soient $H = (H_1, H_2, H_3) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3\right)$ et

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + X_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

un champ de vecteurs tel que

$$\begin{cases} i(X_H)\theta^1 = -dH^1 \\ i(X_H)\theta^2 = -dH^2 \\ i(X_H)\theta^3 = -dH^3. \end{cases}$$

Le système précédent donne les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial H^1}{\partial x_1} = \frac{\partial H^2}{\partial x_4} = -\frac{\partial H^3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial H^1}{\partial x_2} = \frac{\partial H^2}{\partial x_3} = \frac{\partial H^3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial H^1}{\partial x_3} = -\frac{\partial H^2}{\partial x_2} = \frac{\partial H^3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H^1}{\partial x_4} = -\frac{\partial H^2}{\partial x_1} = -\frac{\partial H^3}{\partial x_2} \end{array}\right. \quad (E_1)$$

on déduit aussi

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 H^1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 H^1}{\partial x_3 \partial x_4} = 0 \\ \frac{\partial^2 H^1}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 H^1}{\partial x_2 \partial x_4} \\ \frac{\partial^2 H^1}{\partial x_1 \partial x_4} = -\frac{\partial^2 H^1}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 H^1}{(\partial x_1)^2} = \frac{\partial^2 H^1}{(\partial x_2)^2} = -\frac{\partial^2 H^1}{(\partial x_3)^2} = -\frac{\partial^2 H^1}{(\partial x_4)^2} \end{array}\right. \quad (E_2)$$

et

$$\frac{\partial^3 H^1}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = 0$$

pour tous $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Des équations (E_1) et (E_2) on montre que

$$\begin{aligned} H^1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + k_1 \\ H^2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -dx_1 - cx_2 + bx_3 + ax_4 + k_2 \\ H^3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 + k_3 \end{aligned}$$

et

$$X_H = -b\frac{\partial}{\partial x_1} + a\frac{\partial}{\partial x_2} - d\frac{\partial}{\partial x_3} + c\frac{\partial}{\partial x_4},$$

ce qui montre la proposition.

Proposition I.5 *Soit* $\theta^1 = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4,$ *si* θ^2, θ^3 *sont des* $2-$*formes telles que :*

$$\begin{aligned} i(X)\,\theta^1 &= -dH^1 \\ i(X)\,\theta^2 &= -dH^2 \\ i(X)\,\theta^3 &= -dH^3 \end{aligned}$$

avec $H = (H_1, H_2, H_3)$ *une fonctions quelconque de* $C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ *alors il existe* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\theta^2 = \alpha\theta^1 \text{ et } \theta^3 = \beta\theta^1.$$

Démonstration. Soient $\theta^2 = \sum_{1\le i<j\le 4} a^{ij} dx_i \wedge dx_j$ et $\theta^3 = \sum_{1\le i<j\le 4} b^{ij} dx_i \wedge dx_j$ telles que :

$$\begin{aligned} i(X)\theta^1 &= -dH^1 \qquad (1) \\ i(X)\theta^2 &= -dH^2 \qquad (2) \\ i(X)\theta^3 &= -dH^3 \qquad (3) \end{aligned}$$

On cherche des conditions sur les constantes a^{ij} et b^{ij} telles que toute fonction $H = (H^1, H^2, H^3) \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ soit une application hamiltonienne. Posons $X = X^1\frac{\partial}{\partial x_1} + X^2\frac{\partial}{\partial x_2} + X^3\frac{\partial}{\partial x_3} + X^4\frac{\partial}{\partial x_4}$

De l'équation (1) on déduit :

$$\frac{\partial H^1}{\partial x_1} = X_2$$
$$\frac{\partial H^1}{\partial x_2} = -X_1$$
$$\frac{\partial H^1}{\partial x_3} = X_4$$
$$\frac{\partial H^1}{\partial x_4} = -X_3$$

et de l'équation (2) on montre que

$$a^{12}\frac{\partial H^1}{\partial x_1} - a^{13}\frac{\partial H^1}{\partial x_4} + a^{14}\frac{\partial H^1}{\partial x_3} = \frac{\partial H^2}{\partial x_1} \qquad (E_1)$$
$$a^{12}\frac{\partial H^1}{\partial x_2} - a^{23}\frac{\partial H^1}{\partial x_4} + a^{24}\frac{\partial H^1}{\partial x_3} = \frac{\partial H^2}{\partial x_2} \qquad (E_2)$$
$$a^{13}\frac{\partial H^1}{\partial x_2} - a^{23}\frac{\partial H^1}{\partial x_1} + a^{34}\frac{\partial H^1}{\partial x_3} = \frac{\partial H^2}{\partial x_3} \qquad (E_3)$$
$$a^{14}\frac{\partial H^1}{\partial x_2} - a^{24}\frac{\partial H^1}{\partial x_1} + a^{34}\frac{\partial H^1}{\partial x_4} = \frac{\partial H^2}{\partial x_4} \qquad (E_4)\,.$$

On calcul $\frac{\partial(E_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial(E_2)}{\partial x_1}$ on obtient

$$-a^{13}\frac{\partial^2 H^1}{\partial x_2 \partial x_4} + a^{14}\frac{\partial^2 H^1}{\partial x_2 \partial x_3} + a^{23}\frac{\partial^2 H^1}{\partial x_1 \partial x_4} - a^{24}\frac{\partial^2 H^1}{\partial x_1 \partial x_3} = 0,$$

puisque H^1 est quelconque, ce qui n'est possible que si $a^{13} = a^{14} = a^{23} = a^{24} = 0$. Donc

$$\theta^2 = a^{12}dx_1 \wedge dx_2 + a^{34}dx_3 \wedge dx_4$$

de la même manière on montre que

$$\theta^3 = b^{12}dx_1 \wedge dx_2 + b^{34}dx_3 \wedge dx_4.$$

Les équations (E_1), (E_2), (E_3) et (E_4) deviennent

$$a^{12}\frac{\partial H^1}{\partial x_1} = \frac{\partial H^2}{\partial x_1} \qquad (E_1')$$
$$a^{12}\frac{\partial H^1}{\partial x_2} = \frac{\partial H^2}{\partial x_2} \qquad (E_2')$$
$$a^{34}\frac{\partial H^1}{\partial x_3} = \frac{\partial H^2}{\partial x_3} \qquad (E_3')$$
$$a^{34}\frac{\partial H^1}{\partial x_4} = \frac{\partial H^2}{\partial x_4} \qquad (E_4')\,,$$

et de (E_1') et (E_3') on montre que $a^{12} = a^{34}$. Donc $\theta^2 = \alpha\theta^1$ et $\theta^3 = \beta\theta^1$

II. $K-$SYSTÈMES HAMILTONIENS

A. Exemple des $3-$systèmes hamiltoniens sur $\mathbb{R}^4$.

Considérons les deux formes sur $\mathbb{R}^4$ définies par

$$\theta^1 = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$
$$\theta^2 = dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4$$
$$\theta^3 = dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3.$$

Proposition II.1 *Pour toute application* $H \in C\left(\mathbb{R}^4;\mathbb{R}\right)$, *il existe trois champs de vecteurs* $X_H^1, X_H^2, X_H^3 \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^4\right)$ *tels que :*

$$\left\{\begin{array}{l} i\left(X_H^1\right)\theta^1 = -dH \\ i\left(X_H^2\right)\theta^2 = -dH \quad (S) \\ i\left(X_H^3\right)\theta^3 = -dH \end{array}\right.$$

Dans ce cas le champ de $3-$*vecteurs*

$$X_H = X_H^1 \wedge X_H^2 \wedge X_H^3$$

est appelé un $3-$*système hamiltonien associé à l'application hamiltonienne* H.

En effet, localement on peut poser, pour $i = 1, 2, 3$.

$$X_H^i = X_H^{i1}\frac{\partial}{\partial x_1} + X_H^{i2}\frac{\partial}{\partial x_2} + X_H^{i3}\frac{\partial}{\partial x_3} + X_H^{i4}\frac{\partial}{\partial x_4},$$

Les équations (S) donnent

$$\begin{aligned} X_H^1 &= (-\frac{\partial H}{\partial x_2})\frac{\partial}{\partial x_1} + (\frac{\partial H}{\partial x_1})\frac{\partial}{\partial x_2} + (-\frac{\partial H}{\partial x_4})\frac{\partial}{\partial x_3} + (\frac{\partial H}{\partial x_3})\frac{\partial}{\partial x_4} \\ X_H^2 &= (-\frac{\partial H}{\partial x_3})\frac{\partial}{\partial x_1} + (\frac{\partial H}{\partial x_4})\frac{\partial}{\partial x_2} + (\frac{\partial H}{\partial x_1})\frac{\partial}{\partial x_3} + (-\frac{\partial H}{\partial x_2})\frac{\partial}{\partial x_4} \\ X_H^1 &= (-\frac{\partial H}{\partial x_4})\frac{\partial}{\partial x_1} + (-\frac{\partial H}{\partial x_3})\frac{\partial}{\partial x_2} + (\frac{\partial H}{\partial x_2})\frac{\partial}{\partial x_3} + (\frac{\partial H}{\partial x_1})\frac{\partial}{\partial x_4}. \end{aligned}$$

Posons $L_H = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x_4}\right)^2$ et $X_H = X_H^1 \wedge X_H^2 \wedge X_H^3$, si L_H ne s'annule pas, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_H}X_H = &\left(-\frac{\partial H}{\partial x_4}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} \\ &\left(-\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} \end{aligned}$$

Exemple II.1 *Pour* $H\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ *on a* $L_H = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, *et, donc,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_H}X_H = &-d\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + c\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} \\ &-b\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} + a\frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} \end{aligned}$$

B. Rappel sur le crochet de Schouten-Nijenhuis

Soit M une variété différentiable C^∞ et $A(M)$ l'algèbre extérieure des champs de tenseurs contravariants antisymétriques sur M. Il existe une unique application $\mathbb{R}-$bilinéaire

$$[,]_N : A\left(M\right) \times A\left(M\right) \longrightarrow A\left(M\right)$$

appelée crochet de Schouten-Nijenhuis, qui vérifie :
(i) $[f, g]_N = 0$, $\forall f, g \in A^0\left(M\right) = C^0\left(M, \mathbb{R}\right)$,
(ii) pour un champ de vecteur X et un champ de tenseur Q

$$[X, Q]_N = \mathfrak{L}\left(\mathfrak{X}\right)\mathfrak{Q}$$

est la dérivée de Lie de Q relativement à X,

(iii) pour tout $(P,Q) \in A^p(M) \times A^q(M)$

$$[P,Q]_N = -(-1)^p(-1)^q[Q,P]_N\,,$$

(iv) pour $P \in A^p(M)\,,\ Q \in A^q(M)$ et $R \in A(M)$

$$[P,Q \wedge R]_N = [P,Q]_N \wedge R + (-1)^{(p-1)q}\, Q \wedge [P,R]_N\,,$$

(v) pour tout $(P,Q) \in A^p(M) \times A^q(M)\,,\ [P,Q]_N \in A^{p+q-1}(M)\,,$
(vi) pour tous $P \in A^p(M)\,, Q \in A^q(M)$ et $R \in A^r(M)$

$$[P \wedge R, Q]_N = P \wedge [R,Q]_N + (-1)^{(q-1)r}[P,Q]_N \wedge R.$$

Proposition II.2 *Si H et $K \in C(\mathbb{R}^4;\mathbb{R})$ sont deux applications hamiltoniennes $k-$symplectiques et $X_H, X_K \in A^3(M)$ sont les $3-$systèmes hamiltoniens associés alors le crochet de Schouten-Nijenhuis*

$$[X_H, X_K]_N = 0.$$

Démonstration. D'après les propriétés du crochet de Schouten-Nijenhuis, on a $[X_H, X_K]_N \in A^5(\mathbb{R}^4)$donc nul

C. $k-$Systèmes hamiltoniens sur une variété $k-$symplectique

On va montrer que les propriétés démontrées dans l'exemple précédent reste valable pour toute fonction basique sur une variété $k-$symplectique M.

Proposition II.3 *Pour toute fonction $H \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ basique sur M, on peut associer un champ de $k-$vecteurs $X_H = X_H^1 \wedge ... \wedge X_H^k$ tel que le crochet de Schouten-Nijenhuis $[X_H, X_K]_N$ des deux $k-$vecteurs X_H et X_K associés aux fonctions H et K est nul.*

Démonstration. Soit $H \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ basique sur M on peut associer k champs de vecteurs $X_H^1, ..., X_H^k$ tels que

$$i(X_H^p)\,\theta^p = -dH.$$

Par rapport à un système de coordonnés locales adaptées $(x^{pi}, x^i)_{1\le p\le k, 1\le i\le n}$, le champ de vecteurs X_H^p s'écrit :

$$X_H^p = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{pi}}.$$

Considérons le champ de $k-$vecteurs $X_H = X_H^1 \wedge ... \wedge X_H^k$, par un calcul direct on peut montrer que :

$$X_H = X_H^1 \wedge ... \wedge X_H^k = \sum_{1\le i_1,...,i_k\le n} (-1)^k \left(\frac{\partial H}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial H}{\partial x^{i_k}}\right) \frac{\partial}{\partial x^{1i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{ki_k}}.$$

Soient X_H et X_K deux champs de $k-$vecteurs associés aux fonctions H et K. D'après les formules précédentes du crochet de Schouten-Nijenhuis, et le faite que les fonctions H et K sont basiques sur M, on montre que

$$[X_H, X_K]_N = 0.$$

ce qui achèvent la démonstration

Soit M une variété différentiable munie d'une structure $k-$symplectique $(\theta^1, ..., \theta^k; \mathfrak{F})$ et on suppose de plus que le feuilletage $\mathfrak{F}$ est un feuilletage riemannien. Localement, on a :

$\theta^p_{|U} = \sum\limits_{i=1}^{n} dx^{pi} \wedge dx^i$. et tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ peut s'écrire localement sous la forme : $X = \sum\limits_{1 \le q \le k, 1 \le i \le n} X^{qi} \frac{\partial}{\partial x^{qi}} + \sum\limits_{1 \le i \le n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

On note par $\mathcal{VX}$ et $\mathcal{HX}$ respectivement la partie verticale et la partie horizontale de X :

$$\mathcal{VX} = \sum_{\infty \le \mathrm{II} \le \|, \infty \le \rangle \le \backslash} \mathcal{X}^{\mathrm{II}\rangle} \frac{\partial}{\partial \S^{\mathrm{II}\rangle}}$$

et

$$\mathcal{HX} = \sum_{\infty \le \rangle \le \backslash} \mathcal{X}^{\rangle} \frac{\partial}{\partial \S^{\rangle}}.$$

Dfinition II.1 *Soient $X^1, ..., X^k \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$, k champs de vecteurs. On dit que $\left(X^1, ..., X^k\right)$ est un $k-$système hamiltonien par rapport $\left(\theta^1, ..., \theta^k; \mathfrak{F}\right)$ s'il existe $H = \left(H^1, ..., H^k\right) \in C^\infty\left(M, \mathbb{R}^k\right)$ tel que :*

$$\begin{cases} i\left(X^p\right)\theta^p = -dH^p \\ i\left(\mathcal{VX}\checkmark\right)\theta^q = 0, \text{ pour } q \neq p. \end{cases}$$

Dans ce cas on note $\left(X^1, ..., X^k\right)$ par $\left(X^1_H, ..., X^k_H\right)$ et H est appelée application hamiltonienne associée à $\left(X^1_H, ..., X^k_H\right)$.

Pour $p = 1, ..., k$, on a localement $X^p_H = \sum\limits_{1 \le q \le k, 1 \le i \le n} X^{p,qi}_H \frac{\partial}{\partial x^{qi}} + \sum\limits_{1 \le i \le n} X^{p,i}_H \frac{\partial}{\partial x^i}$, et, donc, les équations de la définition précédente montrent que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^p}{\partial x^i} &= -X^{p,pi}_H \\ \frac{\partial H^p}{\partial x^{pi}} &= X^{p,i}_H \\ \frac{\partial H^p}{\partial x^{qi}} &= 0, \text{ pour } q \neq p \\ X^{p,qi}_H &= 0, \text{ pour } q \neq p \end{aligned}$$

par suite,

$$X^p_H = -\sum_{1 \le i \le n} \frac{\partial H^p}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{pi}} + \sum_{1 \le i \le n} \frac{\partial H^p}{\partial x^{pi}}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

et les composantes H^p de l'application hamiltonienne H s'écrivent :

$$H^p = H^p\left(x^{pi}, x^i\right).$$

Notons donc qu'à toute application hamiltonienne $H = \left(H^1, ..., H^k\right)$ on peut associer un $k-$vecteur $X_H = X^1_H \wedge ... \wedge X^k_H$.

Lemme II.1 *Soient $X \in A^p(M)$ un champ de $p-$vecteurs et $Y_1, ..., Y_k$ des champs de vecteurs, alors le crochet de Schouten-Nijenhuis $\left[X, Y_1 \wedge ... \wedge Y_k\right]_N$ est égal :*

$$\left[X, Y_1 \wedge ... \wedge Y_k\right]_N = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{r(p-1)} \left(\bigwedge_{i=1}^{r} Y_i\right) \wedge \left[X, Y_{r+1}\right]_N \wedge \left(\bigwedge_{i=r+2}^{k} Y_i\right).$$

Démonstration. On sait que, pour $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$ et $R \in A(M)$

$$[P, Q \wedge R]_N = [P, Q]_N \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, R]_N.$$

On démontre le lemme par récurrence sur k. Pour $k = 2$ le lemme découle immédiatement de la formule précédente. Or on a $[X, Y_1 \wedge ... \wedge Y_k]_N = [X, Y_1 \wedge ... \wedge Y_{k-1}]_N \wedge Y_k + (-1)^{(p-1)(k-1)} Y_1 \wedge ... \wedge Y_{k-1} \wedge [X, Y_k]_N$, donc l'hypothèse de récurrence : $[X, Y_1 \wedge ... \wedge Y_{k-1}]_N = \sum\limits_{r=0}^{k-2} (-1)^{r(p-1)} (\bigwedge\limits_{i=1}^{r} Y_i) \wedge [X, Y_{r+1}]_N \wedge (\bigwedge\limits_{i=r+2}^{k-1} Y_i)$ montre $[X, Y_1 \wedge ... \wedge Y_k]_N = \sum\limits_{r=0}^{k-1} (-1)^{r(p-1)} (\bigwedge\limits_{i=1}^{r} Y_i) \wedge [X, Y_{r+1}]_N \wedge (\bigwedge\limits_{i=r+2}^{k} Y_i)$.

Lemme II.2 *Soient $X_1, ..., X_k, Y$ des champs de vecteurs. Alors on a :*

$$[X_1 \wedge ... \wedge X_k, Y]_N = \sum_{s=0}^{k-1} (\bigwedge_{i=1}^{s} X_i) \wedge [X_{s+1}, Y]_N \wedge X_{s+2} \wedge ... \wedge X_k.$$

Démonstration. D'après les propriétés du crochet de Schouten-Nijenhuis on a, pour tous $P \in A^p(M), Q \in A^q(M)$ et $R \in A^r(M)$,

$$[P \wedge R, Q]_N = P \wedge [R, Q]_N \wedge R + (-1)^{(q-1)r} [P, Q]_N \wedge R.$$

On démontre le lemme par récurrence sur k. D'Aprèsaprés la formule précédente, le lemme est évident pour $k = 2$. Or $[X_1 \wedge ... \wedge X_k, Y]_N = X_1 \wedge ... \wedge X_{k-1} \wedge [X_k, Y]_N + [X_1 \wedge ... \wedge X_{k-1}, Y]_N \wedge X_k$; donc l'hypothèse de récurrence : $[X_1 \wedge ... \wedge X_{k-1}, Y]_N = \sum\limits_{s=0}^{k-2} (\bigwedge\limits_{i=1}^{s} X_i) \wedge [X_{s+1}, Y]_N \wedge X_{s+2} \wedge ... \wedge X_{k-1}$ montre que $[X_1 \wedge ... \wedge X_k, Y]_N = X_1 \wedge ... \wedge X_{k-1} \wedge [X_k, Y]_N + \sum\limits_{s=0}^{k-2} (\bigwedge\limits_{i=1}^{s} X_i) \wedge [X_{s+1}, Y]_N \wedge X_{s+2} \wedge ... \wedge X_k$ d'où le lemme.

Des deux lemmes précédents on déduit la proposition suivante :

Proposition II.4 *Si H et K sont deux applications hamiltoniennes alors le crochet de Schouten-Nijenhuis $[X_H, X_K]_N$ des deux $k-$vecteurs $X_H = X_H^1 \wedge ... \wedge X_H^k$ et $X_K = X_K^1 \wedge ... \wedge X_K^k$ associés à H et K est un $2k - 1$ vecteur défini par :*

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{r(k-1)} (\bigwedge_{i=1}^{r} X_K^i) \wedge (\bigwedge_{j=1}^{s} X_H^j) \wedge [X_H^{s+1}, X_K^{r+1}]_N \wedge (\bigwedge_{j=s+2}^{k} X_H^j) \wedge (\bigwedge_{i=r+2}^{k} X_K^i)$$

D. Crochet de Poisson

Proposition II.5 *Soient H, K deux applications hamiltoniennes et $(X_H^1, ..., X_H^k), (X_K^1, ..., X_K^k)$ les systèmes hamiltoniens associés. L'application*

$$\{\{,\}\} : C^\infty\left(M, \mathbb{R}^k\right) \times C^\infty\left(M, \mathbb{R}^k\right) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

définie par :

$$\{\{H, K\}\} = \left(\{\{H, K\}\}^1, ..., \{\{H, K\}\}^k\right)$$

avec

$$\{\{H, K\}\}^p = \theta^p(X_H^p, X_K^p)$$

satisfait

$$[X_H^p, X_K^p] = X_{\{\{H,K\}\}}^p.$$

Démonstration. On a, pour tout $(p = 1, \ldots, k)$,

$$i([X_H^p, X_K^p])\theta^p = [\mathcal{L}_{\mathcal{X}_{\mathcal{H}}^{\checkmark}}, \rangle(\mathcal{X}_{\mathcal{K}}^{\checkmark})]\theta\checkmark = \lceil(\theta\checkmark(\mathcal{X}_{\mathcal{H}}^{\checkmark}, \mathcal{X}_{\mathcal{K}}^{\checkmark})) = -\lceil\{\{\mathcal{H}, \mathcal{K}\}\}\checkmark.$$

Montrons aussi que $i(\mathcal{V}[\mathcal{X}^{\surd}_{\mathcal{H}}, \mathcal{X}^{\surd}_{\mathcal{K}}])\theta^{\text{II}} = \prime$ pour $p \neq q$. Dans un système de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, x^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ on a

$$X^p_H = -\sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial H^p}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{pi}} + \sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial H^p}{\partial x^{pi}}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

et

$$X^p_K = -\sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial K^p}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{pi}} + \sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial K^p}{\partial x^{pi}}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Or $\frac{\partial H^p}{\partial x^{qi}} = \frac{\partial K^p}{\partial x^{qi}} = 0$ pour $p \neq q$,donc on peut écrire

$$[X^p_H, X^p_K] = \sum_{1\leq i\leq n} F(x^{pi}, x^i)\frac{\partial}{\partial x^{pi}} + \sum_{1\leq i\leq n} G(x^{pi}, x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

avec

$$\mathcal{V}[\mathcal{X}^{\surd}_{\mathcal{H}}, \mathcal{X}^{\surd}_{\mathcal{K}}] = \sum_{\infty\leq\rangle\leq\backslash} \mathcal{F}(\S^{\surd\rangle}, \S^{\rangle})\frac{\partial}{\partial \S^{\surd\rangle}}$$

d'où $i(\mathcal{V}[\mathcal{X}^{\surd}_{\mathcal{H}}, \mathcal{X}^{\surd}_{\mathcal{K}}])\theta^{\text{II}} = \prime$ pour $p \neq q$.

Soit $\hbar(M)$ l'ensemble des applications hamiltoniennes de la structure $k-$symplectique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$.

Proposition II.6 *La correspondance* $(H, K) \longmapsto \{\{H, K\}\}$ *de* $\hbar(M)\times\hbar(M)$ *dans* $\hbar(M)$ *est une application* $\mathbb{R}$*-bilinéaire antisymétrique vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *les composantes* $\{\{H, K\}\}^p$ *de* $\{\{H, K\}\}$ *s'écrivent, dans un système de coordonnées locales adaptées* $(x^{pi}, x^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$*, sous la forme :*

$$\{\{H, K\}\}^p = -\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H^p}{\partial x^s}\frac{\partial K^p}{\partial x^{ps}} - \frac{\partial H^p}{\partial x^{ps}}\frac{\partial K^p}{\partial x^s}\right).$$

2. $\{\{,\}\}$ *confère à* $\hbar(M)$ *une structure d'algèbre de Lie de dimension infinie.*

Démonstration. On a d'après la proposition précédente :

$$\{\{H, K\}\}^p = \theta^p(X^p_H, X^p_K) = X^p_H K^p = \sum_{1\leq i\leq n}\left(\frac{\partial H^p}{\partial x^i}\frac{\partial K^p}{\partial x^{pi}} - \frac{\partial H^p}{\partial x^{pi}}\frac{\partial K^p}{\partial x^i}\right).$$

Montrons que $\{\{,\}\}$ vérifie l'identité de Jacobi. On a

$$\begin{aligned}
&\{H, \{K, L\}\}^p + \{K, \{L, H\}\}^p + \{L, \{H, K\}\}^p \\
&= -\theta^p(X^p_H, X^p_{\{K,L\}}) - \theta^p(X^p_K, X^p_{\{L,H\}}) - \theta^p(X^p_L, X^p_{\{H,K\}}) \\
&= -\theta^p(X^p_H, [X^p_K, X^p_L]) - \theta^p(X^p_K, [X^p_L, X^p_H]) - \theta^p(X^p_L, [X^p_H, X^p_K]) \\
&= -d\theta^p\,(X^p_H, X^p_K, X^p_L) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $(\hbar(M), \{\{,\}\})$ est une algèbre de Lie de dimension infinie. Soient H une application hamiltonien et $\left(X^1_H, ..., X^k_H\right)$ le $k-$système hamiltonien associé, alors on la définition suivante :

Dfinition II.2 *Soient* $X_H = \left(X^1_H, ..., X^k_H\right)$ *, et* $X_K = \left(X^1_K, ..., X^k_K\right)$ *les* $k-$*systèmes hamiltoniens associés aux applications hamiltoniennes* H *et* K*. Alors le crochet* $[[X_H, X_K]]$ *défini par :*

$$[[X_H, X_K]] = \left(\left[X^1_H, X^1_K\right], ..., \left[X^k_H, X^k_K\right]\right)$$

vérifie

$$[[X_H, X_K]] = X_{\{\{H,K\}\}}.$$

[1] A. AWANE, *Sur une gnralisation des structures symplectiques*, Thse Strasbourg (1984).
[2] A. AWANE, *k-symplectic structures,* Journal of Mathematical physics 33 (1992) 4046-4052. U.S.A.
[3] A. AWANE, *Structures k-symplectiques*, Thse Mulhouse (1992).
[4] A. AWANE, *G-espaces k-symplectiques homognes*, Journal of Geometry and Physics. 13(1994) 139-157. North-Holland.
[5] A. AWANE, *Some affine properties of the k-symplectic manifolds*, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* "Contribution to Algebra and Geometry" Volume 39 (1998) N°1, 75-83. Germany
[6] A. AWANE, *Systmes extrieures k-symplectiques*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. Vol 56, 1(1998) 65-80.
[7] A. AWANE, M. GOZE, *Pfaffian systems, k-symplectic systems.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht / Boston / London (june 2000).
[8] M. DE LEÓN, E. MERINO, J. OUBIÑA, P.R. RODRIGUES and M.R. SALGADO, *Hamiltonian Systems on $k-$cosymplectic manifolds,* J. Math. Phys. 33, 4046-52 (1998).
[9] M. GOZE - Y. HARAGUCHI *Sur les r-systmes de contact.* CRAS, Paris, (1982), T294 SI 95-97.
[10] I.V. KANATCHIKOV, *On the Duffin-Petiau formulation of the covariant Hamiltonian Dynamics in field theory,* Rep. Mayh. Phys. 4149-90 (1998), hep-th99/11175.
[11] P.MOLINO *Gomtrie de Polarisation.* Feuilletage et quantification gomtrique. Travaux en cours Hermann (1984) 37-53.
[12] P.MOLINO *Gomtrie globale des feuilletages riemanniens.* Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser.A, 1,85(1982) 45-76.
[13] Y. Nambu, Generalised Hamiltonian Dynamics. Physical Review D Volume 7, Number 8, 15 April 1973.
[14] L.K. NORRIS, *Symplectic geomery on T^*M derived from n-symplectic geometry on LM,* J. Geometry and Physics 13 (1998), 51-78.
[15] M. PUTA, *Some Remarks on the k-symplectic manifolds.* Tensors.Vol. 47. Num. 2 (August 1988)109-115.
[16] P.R. RODREGUES, *Ageometry for Lagrangians on the bundle $\mathbb{R}^n \times T^1_n\mathcal{M}$*, Rendiconti di Matematica, Serie VII Volume, Roma (1998).

Adresse : FS Ben M'sik. B.p. 7955. Boulevard Driss Harti. Casablanca. Morocco