African Journal Of Mathematical Physics Volume **5***(2007)7-13*

Optimisation Topologique d'une Structure Elastique via la Décomposition du Domaine

A. Makrizi[1] et B. Radi[2]

1. Equipe de Geometrie Differentielle et Applications. Faculte des Sciences Ben Msik. B.P. 7955. Boulevard Driss Harti. Casablanca. Maroc.,
2. FST Errachidia, BP: 509, Boutalamine, Errachidia

Abstract

En optimisation topologique, on est souvent amener à résoudre un problème de grande taille ou parfois un problème dont le domaine est hétérogène, ainsi la méthode de décomposition du domaine paraît comme une bonne alternative pour résoudre de tel problème. Nous présentons dans ce papier une nouvelle approche de l'opimisation topologique basée décomposition en sous domaines.
Mots clés : Optimisation topologique, SIMP, Méthodes de décomposition du domaine, Optimisation multi-objective.

I. INTRODUCTION

Le but de l'optimisation topologique est de déterminer le sous-domaine Ω^{mat} occupé par la matière constitutive d'un corps, sans a priori sur sa topologie c'est-à-dire sur la nature et la connectivité des éléments qui le constituent. La recherche du domaine structural Ω^{mat} s'effectue au sein d'un domaine de référence Ω plus vaste, inclus dans R^d ($d = 2, 3$). Mathématiquement, le problème d'optimisation topologique s'écrit sous la forme :

$$\min_{\omega \subset \Omega} f(u(\omega), \omega) \tag{1.1}$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} g_i(u(\omega), \omega) \leq 0 & 1 \leq i \leq m \\ h_j(u(\omega), \omega) = 0 & 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

où f est la fonction objectif, g_i et h_j sont les fonctions définissant les contraintes, en pratique ce sont des fonctions implicites et non linéaires en ω. u est la solution de l'équation d'équilibre.

Il existe différentes méthodes d'optimisation topologique que l'on trouve dans la littérature et permettant de résoudre le problème (1.1)[1]. En dépit de son efficacité en conception des structures, l'optimisation topologique n'est pas encore largement répandue dans le domaine industriel, la raison principale est que le problème d'optimisation topologique est un problème de grande taille.

Or, au cours des deux dernières décennies, les ordinateurs parallèles ont connu une grande évolution, en particulier en puissance de calcul et en capacité de stockage[2]. Parmi les méthodes mathématiques trés bien adaptées aux machines parallèles, et permettant la résolution numérique de problèmes de grande taille, on trouve les méthodes de décomposition du domaine (MDD)[3]. Le principe de ces méthodes consiste à décomposer le problème initial en sous-problèmes de petite taille et sur des géométries plus simples[4].

Ainsi, nous proposons une formulation mathématique du problème du minimum de la compliance d'une structure élastique linéaire isotrope, en décomposant le domaine de conception en deux sous-domaines sans recouvrement, on ramène le problème d'élasticité sur le domaine décomposé à un problème de minimisation dont la fonction objectif mesure les sauts de la solution à travers l'interface commune entre les deux sous-domaines, et les contraintes sont les équations aux dérivées partielles, d'où notre problème d'optimisation topologique se reformule comme un problème d'optimisation bi-objective.

Le reste de cet article est organisé comme suit : dans la section 2, on choisit un cas simple d'élasticité linéaire, on donne la formulation du problème d'optimisation topologique qui assure au moins l'existence de la solution, puis dans la section 3, on propose une formulation équivalente dans le cas d'une décomposition du domaine de conception en deux sous-domaines sans recouvrement et on annonce nos propres résultats d'existence de la solution du problème décomposé.

II. DESCRIPTION ET FORMULATION DU PROBLÈME D'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE.

Le problème d'optimisation topologique est un problème d'optimisation non linéaire, souvent non convexe. La fonction objectif dépend d'une variable d'état décrivant le mode opérationnel et les variables de conception déterminent la forme et la topologie. La variable d'état doit satisfaire un problème aux limites. Dans ce papier, on traite un problème typique d'optimisation topologique qui consiste à minimiser la compliance d'une structure élastique linéair isotrope.

On considère un corps élastique dont la configuration de référence est un domaine $\Omega \subset R^d (d = 2, 3)$ de frontière Γ. Le problème d'élasticité linéaire se formule comme suit :

$$\text{Trouver } u : \Omega \to R^d \text{ tel que :}$$
$$(E)\begin{cases} (-div\sigma(u))_i = f_i & \text{dans} \quad \Omega, i = 1, ..., d, \\ u = \varphi_D & \text{sur} \quad \Gamma_D \\ j = 1\overset{d}{\sum} \sigma_{ij}(u)\, n_j = (\varphi_N)_i & \text{sur} \quad \Gamma_N \quad i = 1, ..., d. \end{cases}$$

où $n = (n_j)_{1 \leq j \leq d}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure sur Γ, f est le vecteur des forces volumes agissant sur le corps élastique, φ_D est le déplacement donné sur la partie Γ_D de la frontière, φ_N les tractions de surfaces imposées sur la partie complémentaire Γ_N, et $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ le tenseur des contraintes. Pour simplifier, on prend $\Gamma_N = \emptyset$ et $\varphi_D = 0$. La formulation variationnelle du problème (E) est de trouver $u \in H_0^1(\Omega)^d$ tel que:

$$a(u, v) = l(v) \; \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \tag{2.1}$$

où : $a(u, v) = \int_\Omega E_{ijkl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kl}(v)d\Omega$ et $l(v) = \int_\Omega fvd\Omega$.

D'après[5], le problème (3.5) admet une solution unique. Le milieu supposé non homogène donc on utilise $E_{ijkl}(x)$ au lieu de E_{ijkl} pour chaque $x \in \Omega$.

Ainsi le problème du minimum de la compliance (qui équivaut à une rigidité maximale) prend la forme suivante dans l'approche SIMP :

$$\begin{cases} \min\limits_{\rho} l(u) \\ a_\rho(u, v) = l(v) & \forall v \in U \subseteq H_0^1(\Omega)^d \\ E_{ijkl}(x) = \rho^p(x)E^0_{ijkl} \\ \int_\Omega \rho(x)d\Omega \leq V & 0 < \rho_{\min} < \rho(x) \leq 1 \; \forall x \in \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

où U est l'ensemble des déplacements admissibles, V est le volume à ne pas dépasser par la forme optimale, E^0_{ijkl} sont les propriétés du matériau de départ, p le facteur qui permet de pénaliser les densités intermédiaires, et $\rho : \Omega \longrightarrow R$ la fonction densité de matériau ($\rho(x) = 0$ (resp. $\rho(x) = 1$) correspond au vide (resp. solide)), les coefficients E_{ijkl} doivent être presque partout bornés dans Ω, ainsi on choisit comme espace fonctionnel pour notre problème $\rho \in L^\infty(\Omega)$, or ceci n'assure pas malheureusement l'existence d'une solution du problème (2.2), alors Bendsœ[6] a démontré qu'il est possible d'obtenir l'existence de la solution du problème de pénalisation en limitant plus fortement les variations de la fonction artificielle de densité locale ρ. On choisit $\rho \in H^1(\Omega)$ avec $\|\rho\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left(\rho^2 + \sum_i \partial\rho\partial x_i{}^2\right) d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \leq M$ où $1 < p < \frac{d}{d-2} \quad (\Omega \subset R^d)$

Ainsi, dans toute la suite nous opterons pour la formulation due à Bendsœ :

$$\begin{cases} \min\limits_{u,\rho \in H^1(\Omega)} l(u) \\ a_\rho(u,v) = l(v) \quad \forall v \in U \\ \int_\Omega \rho(x) d\Omega \leq V \quad 0 < \rho_{\min} < \rho(x) \leq 1 \ \forall x \in \Omega \\ \|\rho\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left(\rho^2 + (\nabla\rho)^2\right) d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \leq M \end{cases} \tag{2.3}$$

où $a_\rho(u,v) = \int_\Omega \rho^p(x) E^0_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) d\Omega$

III. MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE POUR LE PROBLÈME D'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE

On décompose le domaine de conception Ω en deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 sans recouvrement c-à-d $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \Gamma_0$ appelé interface.

Le problème d'élasticité linéaire (2.1) devient:

Trouver $u_i \in H^1_{\Gamma_i}(\Omega_i)^d$, i=1,2 :

$$a_{\rho_1}(u_1, v_1) = (f, v_1)_{\Omega_1} + (g, v_1)_{\Gamma_0} \quad \forall v_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d \tag{3.1}$$

$$a_{\rho_2}(u_2, v_2) = (f, v_2)_{\Omega_2} - (g, v_2)_{\Gamma_0} \quad \forall v_2 \in H^1_{\Gamma_2}(\Omega_2)^d \tag{3.2}$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{sur } \Gamma_0 \tag{3.3}$$

où $g_l = \sum\limits_{j=1}^{d} \sigma_{lj}(u_1) n^1_j = -\sum\limits_{j=1}^{d} \sigma_{lj}(u_2) n^2_j$ et $g = (g_l)_{1 \leq l \leq d}$ avec $(g,v)_{\Gamma_0} = \int_{\Gamma_0} g v d\Gamma_0$

En utilisant le théorème de Lax-Milgram[7], les problèmes (3.1) et (3.2) admettent chacun une solution unique, en effet : pour le problème (3.1) la forme a_{ρ_1} est évidemment bilinéaire et continue sur $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d$, de plus elle est coercive d'aprés l'inégalité de KORN, d'autre part : soit $L_1(v_1) = \int_{\Omega_1} f v_1 d\Omega_1 + \int_{\Gamma_0} g v_1 d\Gamma_0$ $\forall v_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d$.

Il est clair que L_1 est une forme linéaire continue sur $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d$ ainsi (3.1) admet une solution unique $u_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d$, même raisonnement pour (3.2).

D'autre part, comme a_{ρ_1} est coercive donc $\exists K_1 > 0$ tel que $\|u_1\|^2_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d} \leq K_1 \ a_{\rho_1}(u_1,u_1)$ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \|u_1\|^2_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d} &\leq K_1 \left(\int_{\Omega_1} f u_1 d\Omega_1 + \int_{\Gamma_0} g u_1 d\Gamma_0\right) \\ &\leq K_1 \left(\|f\|_{L^2(\Omega_1)^d} \|u_1\|_{H^1(\Omega_1)^d} + \|g\|_{L^2(\Gamma_0)^d} \|u_1\|_{L^2(\Gamma_0)^d}\right) \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de trace : $\exists K_2 > 0$ tel que $\|u_1\|_{L^2_{(\Gamma_0)^d}} \leq K_2 \|u_1\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d}$ par suite : $\exists C_1 > 0 / \|u_1\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d} \leq C_1 (\|f\|_{L^2(\Omega_1)^d} + \|g\|_{L^2(\Gamma_0)^d})$. On utilise le même raisonnement pour u_2, d'où :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \|u_i\|_{H^1_{\Gamma_i}(\Omega_i)^d} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega_i)^d} + \|g\|_{L^2(\Gamma_0)^d}) \ i = 1, 2. \tag{3.4}$$

Pour découpler les problèmes locaux, et résoudre indépendamment (3.1) et (3.2), un choix arbitraire de g n'assure pas l'autre condition de transmission (3.3), et donc les solutions obtenues ne correspondent pas aux restrictions sur Ω_1 et Ω_2 de la solution du problème (3.5), c'est ainsi qu'on considère la fonction qui mesure l'écart quadratique des deux solutions locales au niveau de l'interface avec un terme régularisateur, on pose:

$$J_\delta(u_1, u_2, g) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}(u_1 - u_2)^2 d\Gamma_0 + \frac{\delta}{2}\int_{\Gamma_0} g^2 d\Gamma_0$$

Soit $(\rho_1, \rho_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ on définit alors:

$$\begin{cases} \min_g J_\delta(u_1, u_2, g) \\ a_{\rho_1}(u_1, v_1) = (f, v_1)_{\Omega_1} + (g, v_1)_{\Gamma_0} \quad \forall v_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d \\ a_{\rho_2}(u_2, v_2) = (f, v_2)_{\Omega_2} - (g, v_2)_{\Gamma_0} \quad \forall v_2 \in H^1_{\Gamma 2}(\Omega_2)^d \end{cases}$$

L'ensemble des solutions admissibles de (3.5) est:
$U_{ad} = \{(u_1, u_2, g) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d \times H^1_{\Gamma 2}(\Omega_2)^d \times L^2(\Gamma_0)^d / (3.1) \text{ et } (3.2) \text{ sont satisfaites}\}$
Par conséquent, $(u_1^*, u_2^*, g^*) \in U_{ad}$ est une solution optimale si :

$$J_\delta(u_1^*, u_2^*, g^*) \leq J_\delta(u_1, u_2, g) \quad \forall (u_1, u_2, g) \in U_{ad}$$

Theorem III.1 *Le problème (3.5) admet une solution optimale unique.*

Preuve : Soit $\rho \in H^1(\Omega)$, on a vu que le problème (3.5) admet une solution unique $u \in H^1_0(\Omega)^d$ donc en posant :

$u_i = u/\Omega_i$ et $\rho_i = \rho/\Omega_i$ et $g_l = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{lj}(u) n_j$ on a : $(u_1, u_2, g) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d \times H^1_{\Gamma 2}(\Omega_2)^d \times L^2(\Gamma_0)^d$ satisfaisant (3.1) et (3.2) d'où $(u_1, u_2, g) \in U_{ad}$ i.e $U_{ad} \neq \emptyset$, soit alors $\{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, g^{(n)}\}$ une suite minimisante dans U_{ad} :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, g^{(n)}) = \inf_{(u_1,u_2,g)\in U_{ad}} J_\delta(u_1, u_2, g)$$

d'où la suite $\{g^{(n)}\}$ est uniformément bornée dans $L^2(\Gamma_0)^d$, et d'aprés (3.4), $(u_1^{(n)})_n$ et $(u_2^{(n)})_n$ sont uniformément bornées, par conséquent on peut extraire une sous-suite $\{u_1^{(n_i)}, u_2^{(n_i)}, g^{(n_i)}\}$ convergente tel que :

$$u_1^{(n_i)} \to \hat{u}_1 \text{ dans } H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d$$
$$u_2^{(n_i)} \to \hat{u}_2 \text{ dans } H^1_{\Gamma_2}(\Omega_2)^d$$
$$g^{(n_i)} \to \hat{g} \quad \text{dans } L^2(\Gamma_0)^d$$

et par passage à la limite $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{g})$ vérifie (3.1) et (3.2) d'où $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{g}) \in U_{ad}$, d'autre part, la semi-continuité inférieure de J_δ implique que:

$$\inf_{(u_1,u_2,g)\in U_{ad}} J_\delta(u_1, u_2, g) = \lim_{i\to\infty} \inf J_\delta(u_1^{(n_i)}, u_2^{(n_i)}, g^{(n_i)}) \geq J_\delta(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{g})$$

On conclut que $J_\delta(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{g}) = (u_1, u_2, g) \in U_{ad} \inf J_\delta(u_1, u_2, g)$ d'où $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{g})$ est une solution optimale, l'unicité provient des données du problème, la convexité de la fonction J_δ, de l'ensemble U_{ad} et la linéarité des contraintes.■

Theorem III.2 *Soit $(u_1^\delta, u_2^\delta, g^\delta)$ la solution optimale du problème (3.5) pour un $\delta > 0$. Si $\hat{u}$ est la solution du problème (3.5), en posant $\hat{u}_i = \hat{u}/\Omega_i \cup \Gamma_0$ alors $\left\| u_i^\delta - \hat{u}_i \right\|_{H^1_{\Gamma_i}(\Omega_i)^d} \to 0$ quand $\delta \to 0$, pour $i = 1, 2$.*

Preuve : Soit $\hat{g}_l = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{lj}(\hat{u}_1) n_j$ sur Γ_0 $\quad 1 \le l \le d$

On note $(u_1^\delta, u_2^\delta, g^\delta)$ la suite des solutions optimales d'où $J_\delta(u_1^\delta, u_2^\delta, g^\delta) \le J_\delta(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{g})$ $\quad \forall \delta > 0$, i.e

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} (u_1^\delta - u_2^\delta)^2 d\Gamma_0 + \frac{\delta}{2}\int_{\Gamma_0} (g^\delta)^2 d\Gamma_0 \le \frac{\delta}{2}\int_{\Gamma_0} (\hat{g})^2 d\Gamma_0 \quad \forall \delta > 0$$

ainsi $\left\| g^\delta \right\|_{L^2(\Gamma_0)^d}$ est uniformément bornée dans $L^2(\Gamma_0)^d$ et $\left\| u_1^\delta - u_2^\delta \right\|_{L^2(\Gamma_0)^d} \to 0$ quand $\delta \to 0$.
Par (3.4), $\left\| u_1^\delta \right\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d}$ et $\left\| u_2^\delta \right\|_{H^1_{\Gamma 2}(\Omega_2)^d}$ sont aussi uniformément bornées, d'où il existe une sous suite convergeant vers un élément $(u_1^*, u_2^*, g^*) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d \times H^1_{\Gamma 2}(\Omega_2)^d \times L^2(\Gamma_0)^d$ et quand $\delta \to 0$ $\left\| u_1^\delta - u_2^\delta \right\|_{L^2(\Gamma_0)^d} \to 0$ implique $u_1^* = u_2^*$ sur Γ_0. Par passage à la limite u_1^* et u_2^* vérifient (3.1) et (3.2).

Soit alors : $\quad u^* = \begin{cases} u_1^* & \text{dans } \Omega_1 \cup \Gamma_0 \\ u_2^* & \text{dans } \Omega_2 \cup \Gamma_0 \end{cases}$

ainsi u^* vérifie (3.5) et vue l'unicité de la solution du problème (3.5), on a $\hat{u} = u^*$. ■

Remark III.1 *Dans le problème (3.5) pour chaque (ρ_1, ρ_2) et pour chaque $\delta > 0$ il existe $(u_1^\delta, u_2^\delta, g^\delta)$ solutionn optimale unique sans que $u_1^\delta = u_2^\delta$ sur Γ_0, mais d'après le théorème 2 quand $\delta \to 0$, la suite des solutions optimales $(u_1^\delta, u_2^\delta, g^\delta)_\delta$ tend vers l'unique solution optimale (u_1^*, u_2^*, g^*) pour laquelle $u_i^* = u/\Omega_i$ ou u est l'unique solution du problème $a_\rho(u, v) = (f, v)_\Omega$ avec $\rho = \begin{cases} \rho_1 & sur \ \Omega_1 \\ \rho_2 & sur \ \Omega_2 \end{cases}$*

Ainsi pour chaque $(\rho_1, \rho_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ on note par (u_1, u_2, g) la solution optimale du problème (3.5) vérifiant $u_1 = u_2$ sur Γ_0 d'où le corollaire

Corollary III.1 *Pour chaque $(\rho_1, \rho_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$, une solution admissible (u_1, u_2, g) est la solution optimale de (3.5) correspondante (au sens de la remarque précédente) si et seulement si $u_1 = u_2$ sur Γ_0.*

Soit alors le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{u_1, u_2, \rho_1, \rho_2} \ l_1(u_1) + l_2(u_2) \\ \min_g J_\delta(u_1, u_2, g) \\ a_{\rho_1}(u_1, v_1) = (f, v_1)_{\Omega_1} + (g, v_1)_{\Gamma_0} \quad \forall v_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^d \\ a_{\rho_2}(u_2, v_2) = (f, v_2)_{\Omega_2} - (g, v_2)_{\Gamma_0} \quad \forall v_2 \in H^1_{\Gamma 2}(\Omega_2)^d \\ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \rho_i(x) d\Omega_i \le V \quad 0 < \rho_i(x) \le 1, \ x \in \Omega_i, \ i = 1, 2. \\ \left\| \rho_i \right\|_{H^1(\Omega_i)} \le M_i \quad i = 1, 2. \end{cases} \tag{3.5}$$

où $l_i(u_i) = \int_{\Omega_i} f u_i d\Omega_i$

Theorem III.3 *Le problème (3.5) est équivalent au problème (2.3)*

Pour démontrer ce théorème, on commence par définir l'ensemble des solutions admissibles pour chaque problème :

- Pour le problème (2.3) : $U^* = \{u \in H^1_0(\Omega)^d / \exists \rho \in G^*, a_\rho(u, v) = (f, v)_\Omega \ \ \forall v \in H^1_0(\Omega)^d\}$
  ou $G^* = \{\rho \in H^1(\Omega) / \left\| \rho \right\|_{H^1(\Omega)} \le M$ et $\int_\Omega \rho(x) d\Omega \le V, 0 < \rho_{\min} \le \rho(x) \le 1, x \in \Omega\}$
  $u \in U^*$ est une solution optimale de (2.3) si :

$$\forall v \in U^* \quad l(u) \le l(v)$$

- Pour le problème (3.5), on définit l'ensemble des solutions admissibles par :
  $U_* = \{(u_1, u_2, g) \in U_{ad}/(u_1, u_2, g)$ soit la solution optimale de (3.5) correspondante à $(\rho_1, \rho_2) \in G_*\}$
  avec $G_* = \{(\rho_1, \rho_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)/ \|\rho_i\|_{H^1(\Omega_i)} \leq M_i$ et $\sum\limits_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \rho_i(x) d\Omega_i \leq V \quad 0 < \rho_i(x) \leq 1, x \in \Omega_i, i = 1, 2.\}$

$(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{g}) \in U_*$ est une solution optimale de (3.5) si :

$$\forall (u_1, u_2, g) \in U_* \quad l_1(\hat{u_1}) + l_2(\hat{u_2}) \leq l_1(u_1) + l_2(u_2)$$

pour démontrer le théorème 5 nous avons besoin du lemme suivant:

Lemma III.1 $u \in U^*$ *si et seulement si* $(u_1, u_2, g) \in U_*$ *où* $u_i = u/\Omega_i$ *et* $g_l = \sum\limits_{j=1}^{d} \sigma_{lj}(u) n_j$

Preuve du théorème 5 :

Soit $\hat{u} \in U^*$ une solution optimale de (2.3), soient $\hat{u}_i = \hat{u}/\Omega_i$ et $\rho_i = \rho/\Omega_i \quad i = 1, 2$; en posant $\hat{g} = \sum\limits_{j=1}^{d} \sigma_{lj}(u) n_j$, d'après le lemme 2-6 $(\hat{u_1}, \hat{u_2}, \hat{g}) \in U_*$.

Pour montrer que (2.3) $\Rightarrow$ (3.5), il reste à montrer que $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{g})$ est une solution optimale correspondante, d'où $u_1 = u_2$ sur Γ_0, en posant $u = \begin{cases} u_1 & \text{dans } \Omega_1 \cup \Gamma_0 \\ u_2 & \text{dans } \Omega_2 \cup \Gamma_0 \end{cases}$

Le lemme 6 nous permet de dire que $u \in U^*$ et comme $\hat{u}$ est une solution optimale de (2.3) il s'en suit que $l(\hat{u}) \leq l(u)$ d'où $l_1(\hat{u}_1) + l_2(\hat{u}_2) \leq l_1(u_1) + l_2(u_2)$

Réciproquement : Soit $(\hat{u_1}, \hat{u_2}, \hat{g}) \in U_*$ une solution optimale de (3.5) d'où on peut poser $\hat{u} = \begin{cases} \hat{u}_1 & \text{dans } \Omega_1 \cup \Gamma_0 \\ \hat{u}_2 & \text{dans } \Omega_2 \cup \Gamma_0 \end{cases}$ (car $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$ sur Γ_0) ainsi par le lemme 6 $\hat{u} \in U_*$.

Soit $v \in U^*$ et soient $v_i = v/\Omega_i$, si on pose $g_l = \sum\limits_{j=1}^{d} \sigma_{lj}(v) n_j$ alors d'aprés toujours le lemme 6 $(v_1, v_2, g) \in U_*$, or $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{g})$ est une solution optimale de (3.5) implique que $l_1(\hat{u}_1) + l_2(\hat{u}_2) \leq l_1(v_1) + l_2(v_2)$ i.e $l(\hat{u}) \leq l(v)$ ceci $\forall v \in U^*$

D'où $\hat{u}$ est une solution optimale de (2.3).■

IV. CONCLUSION :

L'intérêt industriel de l'optimisation topologique est très grand vue l'économie de matière qu'on peut faire tout en gardant les bonnes propriétés de résistence de la structure. L'un des handicapes de l'utilisation de cette approche en grande échelle est les stcructures de très grande taille. Avec ce travail, nous avons proposé les méthodes de décomosition du domaine sans recouvrement comme alternative naturelle à cet handicape et on a justifié mathématiquement l'existence de la solution du poblème décomposé. La formulation finale obtenue dans cet article est un problème d'optimisation bi-objectifs dont la résolution appel aux techniques d'optimisation multi-objetcifs qui sera le but de notre prochain travail.

V. REFERENCES

[1] Bendsœ M.P. Optimization of Structural Topology, Shape and Material, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.
[2] Radi B. et Estrade J.-F. The ARPEGE model: Some strategies and performances. Parallel Computing, 24 pp 1167-1175, 1998.
[3] El Hami A. and Radi B. Some decomposition methods in the analysis of repetitive structures. Computers and Structures, vol. 58, 5, pp 973-980, 1996.
[4] Quarteroni A. et Alberto V. Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Clarendon Press - Oxford 1999.
[5] Duvaut G. and Lions J.L. Inequalities in Mechanics and Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1976
[6] Bendsœ M.P. et Sigmund O. Topology Optimization, Theory, Methods and Applications. Springer Verlag, Berlin 2003.
[7] Brezis H. Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Masson, Paris 1983.