African Journal Of Mathematical Physics Volume **5***(2007)15-23*

Algèbres de Lie Symplectiques d'Ordre k

A.Awane, A.Chkiriba, M.Lahmouz

Equipe de Geometrie Differentielle et Applications. Faculte des Sciences Ben Msik.
B.P. 7955. Boulevard Driss Harti. Casablanca. Maroc.
Corresponding author: a.awane@yahoo.fr

abstract

We introduce Lie algebras of order k as well as the left symmetric ones. We consider some of their basic properties and study their classification.

Keywords: Symplectic structure, Lie Algebras.
MSC 2000 classification : 53C10, 53D05, 53D30, 53D35.

I. INTRODUCTION

Une structure symplectique d'ordre k sur une variété différentiable M, de dimension $c(n,k) = n + C_n^k$, est définie par la donnée d'une forme différentielle fermée Ω, de degré $k+1$, non dégénérée qui s'annule sur les couples de champs de vecteurs tangents à un feuilletage donné de codimension n.

L'exemple fondamental d'une structure symplectique d'ordre k est donné par l'existence sur l'espace $\bigwedge^k(T^*B)$ des $k-$formes différentielles, au dessus d'une $n-$variété B, d'une $(k+1)-$forme généralisant la forme de Liouville sur le fibré tangent, et qui a pour modèle local

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} dx^{i_1 i_2 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Le cas particulier $k = 1$ correspond à une structure symplectique classique dotée d'un feuilletage lagrangien; cette dernière structure est usuellement appelée polarisation réelle au sens de Molino, Clark et Goel.

Les structures de contact d'ordre supérieur au sens de[1], développées au sein du Laboratoire de Mathématique de Mulhouse dont l'idée maîtresse a été suggérée depuis longtemps par G. Reeb, sont reliées à la géométrie multi-symplectique par analogie avec les liens classiques entre les structures symplectiques et de contact, ou bien, avec les liens entre la géométrie $k-$symplectique et celle définie par un $k-$système de contact ([4],[3]).

Dans ce contexte, G. Martin a donné une extension du théorème de Darboux-Moser-Weinstein et a présenté une nouvelle classe de structures dynamiques ([9] et[10]).

Historiquement, la géométrie multi-symplectique fut introduite pour la première fois par Dedecker en 1953[11], et a connu des développements ultérieurs (Tulczyjew, Gawedzki, Kondracki, Krupka, etc ...). Par la suite, G.C. Magdalina et O. Zbigniew ont mis en relief l'analogie formelle qui existe entre la mécanique newtonienne, l'électrodynamique de Maxwell et la géométrie multi-symplectique[11] d'une part, et d'autre part, S.Kijowski et W.Szczyrba ont développé les crochets de Poisson dans la théorie des champs sur une variété munie d'une structure multi-symplectique.

Dans ce travail on s'interresse aux algèbres de Lie symplectiques d'ordre k, cette notion se dégage de la définition d'une structures symplectique d'ordre k invariante à gauche sur un groupe de Lie. Nous donnerons des propriétés des algèbres de Lie symplectiques d'ordre k nilpotentes, ainsi que leur classification en petites dimensions. Les techniques déployées pour l'étude des algèbres de Lie nilpotentes symplectiques d'ordre k sont empruntées du livre des Professeurs M. GOZE et Y. KHAKIMDJANOV[7].

On étend également cette étude aux algèbres de Lie symétriques à gauche, compatibles avec une structure symplectique d'ordre k, par analogie au cas usuel d'une structure symplectique étudiée par A.Aubert dans[14].

II. ALGÈBRES DE LIE SYMPLECTIQUES D'ORDRE K

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension $c(n,k)$ sur $\mathbb{K}$, Ω une $(k+1)-$ forme extérieure fermée sur $\mathcal{G}$, et $\mathcal{H}$ une sous algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ de codimension n. On dit que $(\Omega, \mathcal{H})$ est une structure symplectique d'ordre k sur $\mathcal{G}$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Ω est non dégénérée, c'est à dire, l'application

$$X \longmapsto i(X)\Omega$$

de $\mathcal{G}$ dans $\bigwedge^k(\mathcal{G})$, est injective.

2. La sous algèbre de Lie $\mathcal{H}$ est un sous espace totalement isotrope par rapport à la $(k+1)-$forme Ω, c'est à dire la $(k-1)$-forme $i(x)i(y)\Omega$ est nulle pour tous x, y appartenant à $\mathcal{H}$.

Exemples II.1 *:*

1. $[X_1, X_4] = X_4$ *(les crochets non définis sont nuls) et* $\mathcal{H}$ *la sous algèbre de Lie de* $\mathcal{G}$ *engendrée par* X_4, X_5, X_6.
   Soit $\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6$, *où* $\left\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6\right\}$ *est la base duale. Le couple* $(\Omega, \mathcal{H})$ *définit une structure symplectique d'ordre* 2 *sur* $\mathcal{G}$.

2. *Exemples triviaux d'algèbres de Lie symplectiques d'ordre* k *:*

   (a) *Algèbre de Lie symplectique d'ordre* 1.
   Soit $\mathcal{G}$ *une algèbre de Lie de dimension* $c(n,1)$ *sur* $\mathbb{K}$, *une structure symplectique d'ordre* 1 *n'est rien d'autre qu' une structure* $1-$*symplectique.*

   (b) *Algèbres de Lie symplectiques d'ordre* n $(n \geq 2)$.
   Une structure symplectique d'ordre n *sur une algèbre de Lie* $\mathcal{G}$ *de dimension* $n+1$ *sur* $\mathbb{K}$ *est définie par un couple* $(\Omega, \mathcal{H})$ *dans lequel* Ω *est de degré* $n+1$ *(forme volume) et* $\mathcal{H}$ *est tout simplement une droite.*

A. Algèbres de Lie symplectiques d'ordre 2, de dimension 6, complexes.

Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension 6 sur $\mathbb{C}$ munie d'une structure symplectique d'ordre 2, $(\Omega, \mathcal{H})$; le théorème de classification montre qu'il existe une base $\{X_1, X_2, \ldots, X_6\}$ de base duale $\{\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^6\}$ telle que la sous algèbre de Lie $\mathcal{H}$ est engendrée par $\{X_4, X_5, X_6\}$ et la $3-$forme Ω s'écrit sous la forme :

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6,$$

qui est non dégénérée[6]. La fermeture de Ω donne lieu aux équations suivantes :

$$(S)\begin{cases} -C_{13}^1 - C_{23}^2 + C_{34}^4 - C_{24}^5 + C_{14}^6 = 0 \\ C_{15}^1 + C_{25}^2 + C_{45}^4 - C_{24}^3 = 0 \\ C_{16}^1 + C_{26}^2 + C_{46}^4 + C_{14}^3 = 0 \\ -C_{35}^1 - C_{24}^1 + C_{45}^6 = 0 \\ -C_{36}^1 - C_{24}^2 - C_{34}^3 + C_{46}^6 = 0 \\ C_{35}^2 - C_{14}^1 - C_{34}^3 + C_{45}^5 = 0 \\ C_{36}^2 + C_{46}^5 - C_{14}^2 = 0 \\ C_{35}^4 + C_{12}^1 - C_{23}^3 - C_{25}^5 + C_{15}^6 = 0 \\ C_{36}^4 - C_{26}^5 + C_{12}^2 + C_{13}^3 + C_{16}^6 = 0 \\ C_{56}^4 + C_{26}^3 + C_{15}^3 = 0 \\ C_{16}^1 + C_{36}^3 + C_{56}^5 - C_{15}^2 = 0 \\ C_{26}^1 - C_{25}^2 - C_{35}^3 + C_{56}^6 = 0. \end{cases}$$

Les C_{ij}^k dénotent les constantes de structures de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Si on se place dans le cas où $\mathcal{H}$ est un idéal, c'est dire que $[\mathcal{G},\mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$. On a le résultat suivant : L'idéal $\mathcal{H}$ est abélien et l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est résoluble.

III. ALGÈBRES SYMPLECTIQUES D'ORDRE K NILPOTENTES EN PETITE DIMENSION

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension $C_n^k + n$ munie d'une structure symplectique d'ordre k définie par $(\Omega, \mathcal{H})$, on suppose que $\mathcal{G}$ est nilpotente.

Rappelons que la structure symplectique d'ordre 1 sur une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ n'est autre que la structure $1-$symplectique sur $\mathcal{G}$. On conclut alors que toute algèbre de Lie symplectique nilpotente est symplectique d'ordre 1 nilpotente. Et la classification en dimension ≤ 6 est celle donnée dans[4].

A. Algèbres de Lie symplectiques d'ordre 2 nilpotentes

Dans ce cas $\dim \mathcal{G} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. On se base dans cette classification sur la liste donnée dans[7], qui concerne les algèbres de Lie complexes.

1. Cas où $\dim \mathcal{G} = \ni \qquad (n = 2)$

Comme toute algèbre de Lie de dimension $n+1$ est symplectique d'ordre n, alors toute algèbre de Lie de dimension 3 est symplectique d'ordre 2.

Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie engendrée par $\{X_1, X_2, X_3\}$, $\mathcal{H}$ la droite $\mathbb{K}\mathbb{X}_{\not\models}$, et Ω la forme volume donnée par:

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$$

La classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 3, symplectiques d'ordre 2 est la suivante:
n_1^3 : l'algèbre abélienne.
n_2^3 : l'algèbre de Heisenberg définie par $[X_1, X_3] = X_2$.

2. Cas où $\dim \mathcal{G} = 6$ (n=**3**)

Considérons l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ nilpotente de dimension 6 engendrée par $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$, et $\mathcal{H}$ sa sous algèbre de Lie engendrée par $\{X_4, X_5, X_6\}$. On va montrer que toute algèbre de Lie nilpotente de dimension 6^7 est symplectique d'ordre 2. Pour celà on donne pour chaque classe une 3−forme Ω qui définit avec $\mathcal{H}$ une structure symplectique d'ordre 2 sur $\mathcal{G}$.

La classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 6, symplectiques d'ordre 2 est la suivante:

n_0^6 : l'algèbre de Lie abélienne,

$$n_1^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; \\ [X_1, X_4] = X_5; [X_1, X_5] = X_6, \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^6 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4$$

$$n_2^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; \\ [X_1, X_5] = X_6; [X_2, X_3] = X_6, \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^6 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4$$

$$n_3^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; \\ [X_1, X_5] = X_6; [X_2, X_3] = X_5; [X_2, X_4] = X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^6 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4$$

$$n_4^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; \\ [X_1, X_5] = X_6; [X_3, X_4] = X_6; [X_2, X_5] = -X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^4 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^6 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^5 \wedge \omega^3 \wedge \omega^2$$

$$n_5^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; \\ [X_1, X_5] = X_6; [X_3, X_4] = X_6; [X_2, X_3] = X_5; \\ [X_2, X_4] = X_6; [X_2, X_5] = -X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^6 + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^5$$

$$n_6^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_6; \\ [X_2, X_3] = X_5; [X_2, X_5] = X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^6 + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^5$$

$$n_7^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; \\ [X_1, X_4] = X_6; [X_2, X_5] = X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^6 + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^5$$

$$n_8^6 : \begin{cases} [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_1, X_5] = X_6; \\ [X_2, X_3] = X_5; [X_2, X_4] = X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5$$

$$n_9^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 + X_5; [X_1, X_3] = X_4; \\ [X_1, X_4] = X_6; [X_1, X_5] = X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5$$

$$n_{10}^6 : \begin{cases} [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_6; \\ [X_2, X_3] = X_5; [X_2, X_5] = X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^6 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4$$

$$n_{11}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_5; [X_1, X_3] = X_4; \\ [X_1, X_4] = X_6; [X_2, X_5] = X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^6 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4$$

$n_{12}^6 : [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_6; [X_2, X_5] = X_6.$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^6 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4$$

$$n_{13}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; \\ [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6$$

$$n_{14}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; \\ [X_1, X_5] = X_6; [X_2, X_3] = X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5$$

$n_{15}^6 : [X_1, X_2] = X_3 + X_5; [X_1, X_3] = X_4; [X_2, X_5] = X_6.$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6$$

$n_{16}^6 : [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_6.$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6$$

$$n_{17}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_6; [X_1, X_3] = X_4; \\ [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_5. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6$$

$n_{18}^6 : [X_1, X_2] = X_5; [X_1, X_3] = X_6; [X_2, X_4] = X_6.$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6$$

$n_{19}^6 : [X_1, X_2] = X_6; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5.$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6$$

$n_{20}^6 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_5] = X_6.$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5.$$

Pour les algèbres de Lie réelles, nous avons $n_0^6, \dots, n_{20}^6$ et

$$n_{21}^6 : \begin{cases} [X_1, X_3] = X_5; [X_1, X_4] = X_6; \\ [X_2, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = -X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6$$

$$n_{22}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_5; [X_1, X_4] = X_6; \\ [X_2, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = -X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6$$

$$n_{23}^6 : \begin{cases} [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_6; \\ [X_2, X_3] = X_5; [X_2, X_5] = -X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^6 + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^5$$

$$n_{24}^6 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_6; \\ [X_2, X_3] = X_5; [X_2, X_5] = -X_6. \end{cases}$$

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^6 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4$$

On conclut alors que toute algèbre de Lie nilpotente de dimension 6 est symplectique d'ordre 2, de plus la sous algèbre de Lie $\mathcal{H}$ définissant cette structure est un idéal abélien.

IV. ALGÈBRES DE LIE SYMPLECTIQUES D'ORDRE K, SYMÉTRIQUES À GAUCHE

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension $n+C_n^k$, sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) munie d'une structure symplectique d'ordre k, $(\Omega, \mathcal{H})$ et d'une structure d'algèbres symétriques à gauche définie par $\mu \ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$.

On dit que μ est compatible avec la structure symplectique d'ordre k, $(\Omega, \mathcal{H})$ si la propriété suivante est satisfaite :

$$i\left(\mu\left(X, Y\right)\right) i(Z)\Omega = -i(Y)i([X, Z])\Omega, \tag{4.1}$$

pour tous X, Y et Z dans $\mathcal{G}$.

Une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ symplectique d'ordre k munie d'une structure symétrique à gauche compatible est dite *algèbre de Lie symplectique d'ordre k symétrique à gauche.*

Nous étudions par la suite l'existence d'un produit symétrique à gauche compatible avec une structure symplectique d'ordre k, dans tout ce qui suit si $\left(e_1, ..., e_{C_n^k+n}\right)$ désigne une base de $\mathcal{G}$.

Remarque IV.1 *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie symplectique d'ordre* 1,*donc $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie (de dimension* $2n$*) symplectique, par conséquent $\mathcal{G}$ possède une structure symétrique à gauche compatible*[18].

A. Algèbres de Lie de dimension $n+1$ symplectiques d'ordre n, symétriques à gauche

Dans le cas où $n \geq 2$, on a :

Proposition IV.1 *Si $\mathcal{G}$ est munie d'une structure symétrique à gauche μ compatible avec la structure symplectique d'ordre n, alors $\mathcal{G}$ est abélienne et μ est triviale sur $\mathcal{G}$.*

Démonstration. Pour montrer que $[e_i, e_j] = 0$ pour tous $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, il suffit de montrer que $i\left([e_i, e_j]\right)\Omega = 0$ et utiliser la non dégénéréscence de Ω.

Soient $i, j, s \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ tel que $s \neq i$ ou $s \neq j$, alors on a

$$\begin{aligned}
&i\left([e_i, e_j]\right)\Omega\left(e_{1,} \ldots, \check{e}_s, \ldots, e_{n+1}\right) \\
&= \Omega\left([e_i, e_j], e_{1,} \ldots, \check{e}_s, \ldots, e_{n+1}\right) \\
&= \varepsilon\Omega\left(e_l, [e_i, e_j], e_j, e_{1,} \ldots, \check{e}_l, \ldots, \check{e}_j, \ldots, \check{e}_s, \ldots, e_{n+1}\right) \text{avec } \varepsilon = \pm 1,\ l \neq s \text{ et } l \neq j \\
&= \varepsilon\Omega\left(\mu(e_i, e_l), e_j, e_j, e_{1,} \ldots, \check{e}_l, \ldots, \check{e}_j, \ldots, \check{e}_s, \ldots, e_{n+1}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $[e_i, e_j] = 0$, pour tous $i, j = 1, \ldots, n+1$, et le fait que la structure symétrique à gauche soit compatible avec la structure symplectique d'ordre n implique que μ est triviale sur $\mathcal{G}$, ce qui achève la démonstration.

Remarque IV.2 *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie symplectique d'ordre 1,donc $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie (de dimension $2n$) symplectique, par conséquent $\mathcal{G}$ possède une structure symétrique à gauche compatible*[18]. *Ceci montre que le résultat démontré dans la proposition précédente tombe en défaut dans le cas où $n = 1$.*

B. Algèbres de Lie symplectiques d'ordre k symétriques à gauche avec $k \geq 2$.

Proposition IV.2 *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie symplectique d'ordre k, munie d'une structure symétrique à gauche définie par μ compatible avec la structure symplectique d'ordre k. Alors on a la propriété suivante :*

$$\mu(X,Y) = -\mu(Y,X),$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{G}$.

Pour démontrer cette proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme IV.1 *Pour tous $X, Y, Z, T \in \mathcal{G}$ on a :*

$$i(\mu(X,Y))\, i(Z)\, i(T)\, \Omega = i(X)\, i(Y)\, i(\mu(Z,T))\, \Omega.$$

Démonstration (de la proposition). Le lemme précédent donne

$$\begin{aligned} i(\mu(Y,X))\, i(Z)\, i(T)\, \Omega &= i(Y)\, i(X)\, i(\mu(Z,T))\, \Omega \\ &= -i(\mu(X,Y))\, i(Z)\, i(T)\, \Omega. \end{aligned}$$

Et de la non dégénéréscence de la forme Ω on déduit que

$$\mu(X,Y) = -\mu(Y,X)$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{G}$.

Corollaire IV.1 *Pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{G}$, on a :*

$$\begin{aligned} i([X,Y])\, i(Z)\, \Omega &= -i(X)\, i([Y,Z])\, \Omega \\ i(\mu(X,Y))\, i(Z)\, \Omega &= -i(X)\, i(\mu(Y,Z))\, \Omega \end{aligned}$$

Corollaire IV.2 *Pour $k = 2$, l'algèbre de Lie $(\mathcal{G}, [,])$ est abélienne et μ est triviale.*

Proposition IV.3 *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie symplectique d'ordre k, munie d'une structure symétrique à gauche définie par μ compatible avec la structure symplectique d'ordre k. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. $\mu(X, \mu(Y,Z)) = \mu(\mu(X,Y), Z) = 0$
2. $[\mu(X,Y), Z] = 0$
3. $\mu(X, [Y,Z]) = 0$
4. $[X, [Y,Z]] = 0$

pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{G}$.

Proposition IV.4 *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie symplectique d'ordre k, munie d'une structure symétrique à gauche définie par μ compatible avec la structure symplectique d'ordre k. Alors on a :*

$$[X,Y] = -\mu(X,Y)$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{G}$.

Preuve. Soient $X, Y, Z \in \mathcal{G}$, de la relation (4.1)et celle donnée par le corollaire (2) , on écrit :

$$\begin{aligned} i(\mu(X,Y))\, i(Z)\,\Omega &= i([X,Z])\, i(Y)\,\Omega \\ &= -i([Z,X])\, i(Y)\,\Omega \\ &= i(Z)\, i([X,Y])\,\Omega \\ &= -i([X,Y])\, i(Z)\,\Omega. \end{aligned}$$

Et de la non dégénéréscence de Ω, on déduit que $[X,Y] = -\mu(X,Y)$ pour tous $X, Y \in \mathcal{G}$.

Théorème IV.1 *Toute algèbre de Lie symplectique d'ordre k ($k \geq 2$) symétrique à gauche est abélienne.*

Démonstration. Soient $X, Y, Z_1, \ldots, Z_k \in \mathcal{G}$, On a :

$$\begin{aligned} & d\Omega(X, Y, Z_1, \ldots, Z_k) \\ = & -\Omega([X,Y], Z_1, \ldots, Z_k) \\ & + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}\, \Omega\left([X, Z_i], Y, Z_1, \ldots, \check{Z}_i, \ldots, Z_k\right) \\ & + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i}\, \Omega\left([Y, Z_i], X, Z_1, \ldots, \check{Z}_i, \ldots, Z_k\right) \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j}\, \Omega\left([Z_i, Z_j], X, Y, Z_1, \ldots, \check{Z}_i, \ldots, \check{Z}_j, \ldots, Z_k\right) \\ = & -\Omega([X,Y], Z_1, \ldots, Z_k) + \\ & \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} (-1)^{j-1} (-1)^{i-1}\, \Omega([X,Y], Z_1, \ldots, Z_i, \ldots, Z_j, \ldots, Z_k) \\ & + \sum_{i=1}^{k} \Omega(\mu(X,Y), Z_1, \ldots, Z_k) \\ & - \sum_{i=1}^{k} \Omega(\mu(Y,X), Z_1, \ldots, Z_k) \\ = & -\Omega([X,Y], Z_1, \ldots, Z_k) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \Omega([X,Y], Z_1, \ldots, Z_k) \\ & + \sum_{i=1}^{k} \Omega(\mu(X,Y), Z_1, \ldots, Z_k) + \sum_{i=1}^{k} \Omega(\mu(X,Y), Z_1, \ldots, Z_k) \\ = & -\Omega([X,Y], Z_1, \ldots, Z_k) + \left(\frac{k(k-1)}{2}\right) \Omega([X,Y], Z_1, \ldots, Z_k) \\ & + 2k\Omega(\mu(X,Y), Z_1, \ldots, Z_k) \\ = & \frac{1}{2}\left(k^2 - 5k - 2\right) i([X,Y])\, \Omega(Z_1, \ldots, Z_k) \end{aligned}$$

Ω étant fermée et l'équation $k^2 - 5k - 2 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$ donc

$$[X,Y] = \mu(X,Y) = 0$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{G}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque IV.3 *Notons qu'une algèbre de Lie symplectique d'ordre k non abélienne ne peut être munie d'une structure symétrique à gauche.*

V. REFERENCES

[1] W. ABI-RIZK-ZEITOUNI. *Structure de contact de degré supérieur à 1.* Thèse Strasbourg 1984.
[2] A. AWANE *G-espaces k-symplectiques homogènes.* Journal of Geometry and Physics. 13(1994) 139-157. North-Holland.
[3] A.AWANE *Systèmes extérieures k-symplectiques.* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. Vol 56, 1(1998) 65-80.
[4] A. AWANE - M. GOZE. *Pfaffian systems, k-symplectic systems.* Kluwer Academic Publishers. Dordreicht / boston / London 2000.
[5] A. AWANE - M. BELAM - S. FIKRI - M. LAHMOUZ - B. NAANANI *Systèmes hamiltoniens k-symplectiques.* Revista Matematica Complutence. Espagne. Volume 15-2002, Num. 1, 147-167.
[6] A. AWANE - M. BELAM - S. FIKRI - M. LAHMOUZ - B. NAANANI *Structures symplectiques d'ordre supérieur.* Roumain Bull Math 2001.
[7] M. GOZE - Y. KHAKIMDJANOV *Nilpotent Lie Algebras.* Kluwer Academic Publishers. Dordreicht / boston / London 1996.
[8] C.M.MARLE et Paulette Libermann Livre du symplectique et mécanique
[9] G. MARTIN *A Darboux Theorem for multi-symplectic Manifolds.* Lectures in Mathematical Physics. 16,1988, 133-138. Kluwer Academic Publishers.
[10] G. MARTIN *Dynamical structure for k-vector fields.* Int. Journal of Theoretical physics. Volume 27, N5, 1988, 571-585
[11] M. GUSIEW-CZUDZAK (1993), *Formalizm multisymplektyczny w mechanice i elektrodynamice klasycznej*, Diploma Thesis, Univesity of Wroclaw
[12] Vergne M. Variétés des algèbres de Lie nilpotentes.
Thèse de $3^{ème}$ cycle, Paris, 1966.
[13] Naanani B. *Structures symplectiques d'ordre k.* Thèse Nationale, Casablanca, 2001.
[14] A. AUBERT *Structures affines et pseudo-métriques invariantes à gauche sur des groupes de Lie*, Thèse Montpellier II (dec. 1996).
[15] E. CARTAN. *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes,* Anales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t 12 B, p 1-99 (1898).
[16] J.L. KOSZUL. *Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affines,* Bull. Soc. Math. France, 89, p 515-533 (1961).
[17] A. MEDINA. *Autour des connexions plates invariantes à gauche sur les groupes de Lie,* Thèse Montpellier (1979).
[18] A. MEDINA, P. REVOY, *Groupes de Lie à Structure Symlectique Invariante,* Symplectic geometry, groupoïds and systems, Séminaire Sud Rhodanien, (Edit. P. Dazord, A. Weinstein), Springer Verlag, p 247-266 (1991).
[19] A. MEDINA, P. REVOY, *Algèbres de Lie orthogonales et modules orthogonaux,* Comm. in Algebras, 21(7) 2295-2315 (1993).
[20] J. MILNOR, *On fondamental Groups of Complete affinely flat manifolds,* Adv. Math. 25:2 (1977), 178-187.
[21] M. PUTA, *Some Remarks on the k-symplectic manifolds.* Tensors.Vol. 47. Num. 2 (August 1988)109-115.
[22] E. REMM, *Structures affines sur les algèbres de Lie et opérades Lie admessibles,* Thèse Haute Alsace (dec. 2001).
[23] E. B. VINBERG. *Convex homogeneous cones,* Translation of de Moscow Math. Soc. N° 12, p 340-403.