



## Symétries ponctuelles et potentielles de l'équation de Fokker-Planck

A. Ouhadan<sup>a,b</sup>, E. H. El Kinani<sup>a,b,\*</sup>, M. Rahmoune<sup>b,c</sup> and A. Awane<sup>d</sup>

<sup>a</sup> *Université Moulay Ismail, Faculté des Sciences et Techniques, Département de Mathématiques, Groupe d'Algèbre et Applications Boutalamine B.P.509, Errachidia, Maroc.*

<sup>b</sup> *UFR de Sciences de l'Ingénieur, Faculté des Sciences et Techniques, Boutalamine B.P.509, Errachidia, Maroc.*

<sup>c</sup> *Université Moulay Ismail, Ecole Supérieure de Technologie, Meknes, Maroc.*

<sup>d</sup> *UFR Géométrie Différentielle et Applications, Faculté des Sciences Ben M' Sik, Casa, Maroc.*

\* *hkinani@ictp.trieste.it*

### Résumé

Dans ce travail le critère d'invariance est appliqué à l'équation de Fokker-Planck (FP). La résolution du système correspondant conduit à ses symétries ponctuelles. Un exemple de solutions sera traité. Comme l'équation de Fokker-Planck peut s'écrire sous une forme conservative, nous considérons un système auxiliaire associé à cette équation dont la détermination des symétries ponctuelles conduit aux symétries potentielles de l'équation de Fokker-Planck.

### I. INTRODUCTION

Récemment l'application de la méthode des symétries de Lie dans la résolution des équations aux dérivées partielles a connue une forte progression<sup>2,3,4</sup>. Cette méthode a été introduite par Sophus Lie<sup>1</sup>. Elle a été premièrement appliquée pour déterminer les symétries ponctuelles. Par suite la généralisation de ces symétries a permis d'obtenir de nouvelles type de symétries à savoir les symétries potentielles et les symétries de Lie-Bäcklund. Le problème de classification des solutions invariantes et des équations aux dérivées partielles selon leurs groupes de symétries a été sujet de plusieurs travaux<sup>5,6,7,8</sup>. L'objectif de ce travail est de déterminer toutes les symétries ponctuelles ainsi que les symétries potentielles et de donner un exemple de solutions de l'équation de Fokker-Planck considérée sous la forme suivante :

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + xu_x(x, t) + u(x, t), \quad (1.1)$$

où  $u_t(x, t)$ , est une fonction qui dépend des variables  $x$  et  $t$ , à déterminer et  $u_a$  désigne la dérivation par rapport à la variable  $a$ . L'équation de Fokker-Planck est apparue pour la première fois en théorie cinétique plus précisément dans la description de l'évolution de la fonction de distribution<sup>9,10,11</sup> d'une particule. En probabilité, elle est appelée aussi l'équation de Kolmogorov et elle décrit la densité de probabilité de transition en processus de diffusion.

---

<sup>0</sup> © a GNPHE publication 2007, *ajmp@fsr.ac.ma*

## II. RAPPELS SUR L'INVARIANCE INFINITÉSIMALE ET LES SYMÉTRIES PONCTUELLES

Considérons un groupe  $G_\epsilon$  de transformations infinitésimales à un paramètre sur les variables  $(x, t, u)$  donné par :

$$\tilde{x} = x + \epsilon\xi(x, t, u) + O(\epsilon^2), \quad (2.1)$$

$$\tilde{t} = t + \epsilon\eta(x, t, u) + O(\epsilon^2), \quad (2.2)$$

$$\tilde{u} = u + \epsilon\varphi(x, t, u) + O(\epsilon^2), \quad (2.3)$$

où  $\epsilon$  désigne le paramètre du groupe et les fonctions  $\xi, \eta, \varphi$  sont des fonctions arbitraires à valeurs réelles définies sur un sous ensemble de  $X \times R$  des variables indépendantes  $X = \langle x, t \rangle$  et la variable dépendante  $R = \langle u \rangle$ . Le générateur associé à ce groupe de transformations est donné par :

$$V = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (2.4)$$

La détermination de  $V$  revient à déterminer les coefficients  $\xi, \eta$ , et  $\varphi$ .

### Définition 1

Soit  $G_\epsilon$  un groupe de transformations,  $\Delta = 0$  une équation différentielle et  $\Pi_\Delta$  l'espace de solutions de  $\Delta$

$$\Pi_\Delta = \{x \in X \times R : \Delta(x) = 0\}$$

l'espace de solutions de  $\Delta$  est dit  $G_\epsilon$ -invariant si :

$$g_\epsilon \cdot \Pi_\Delta = \{g_\epsilon \cdot x \in X \times R : \Delta(g_\epsilon \cdot x) = 0\} = \Pi_\Delta$$

### Théorème

Soit  $G_\epsilon$  un groupe de transformations infinitésimales à un paramètre, l'espace  $\Pi_\Delta$  est  $G_\epsilon$ -invariant si et seulement si :

$$Pr^{(2)}V(\Delta) = 0, \text{ chaque fois que } \Delta = 0, \quad (2.5)$$

où  $\Delta = u_t - u_{xx} - xu_x - u$ ,

$Pr^{(2)}V$  désigne le prolongement d'ordre 2 de  $V$  donné par :

$$Pr^{(2)}V = V + \varphi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

où

$$\varphi^t = D_t(\varphi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{tx} + \eta u_{tt}, \quad (2.6)$$

$$\varphi^x = D_x(\varphi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{xx} + \eta u_{xt}, \quad (2.7)$$

$$\varphi^{xx} = D_{xx}(\varphi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{xxx} + \eta u_{xxt}, \quad (2.8)$$

$$\varphi^{xt} = D_{xt}(\varphi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{xtx} + \eta u_{xtt}, \quad (2.9)$$

$$\varphi^{tt} = D_{tt}(\varphi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{ttx} + \eta u_{ttt}. \quad (2.10)$$

Par conséquent le critère (2.5) devient

$$(-\xi u_x - \varphi - x\varphi^x + \varphi^t - \varphi^{xx})|_{\Delta=0} = 0,$$

donc la résolution de ce système revient à résoudre le système suivant :

$$\eta_u = 0, \tag{2.11}$$

$$\eta_x = 0, \tag{2.12}$$

$$\xi_u = 0, \tag{2.13}$$

$$-\varphi - x\varphi_x + \varphi_t + u\varphi_u - u\eta_t - \varphi_{xx} = 0, \tag{2.14}$$

$$-\xi + x\xi_x - \xi_t - x\eta_t - 2\varphi_{xu} + \xi_{xx} = 0, \tag{2.15}$$

$$-\eta_t + 2\xi_x = 0, \tag{2.16}$$

$$\varphi_{uu} = 0. \tag{2.17}$$

L'équation,  $\varphi_{uu} = 0$  entraîne que  $\varphi$  est linéaire en  $u$ , donc

$$\varphi = A(x, t)u + B(x, t),$$

avec  $A$  et  $B$  sont des fonctions de  $x$  et  $t$ . Et puisque  $\eta_x = 0$ , et  $-\eta_t + 2\xi_x = 0$ , alors

$$\xi = \frac{1}{2}\eta_t x + \alpha(t),$$

où  $\alpha$  est une fonction qui dépend uniquement du temps. Par conséquent  $\xi_{xx} = 0$ .

En substituant  $\varphi$  et  $\xi$  par leurs expressions dans (2.15) et en dérivant l'expression obtenue par rapport à  $x$  on obtient la relation  $-\eta_t - \frac{1}{2}\eta_{tt} - 2A_{xx} = 0$ , ainsi

$$A(x, t) = \left(-\frac{1}{4}\eta_t - \frac{1}{8}\eta_{tt}\right)x^2 + A_1(t)x + A_2(t), \tag{2.18}$$

$$\alpha(t) + \alpha'(t) + 2A_1(t) = 0, \tag{2.19}$$

avec  $A_1$  et  $A_2$  sont des fonctions du temps uniquement.

Revenant à l'équation (2.14) on trouve que

$$-B - xB_x + B_t - B_{xx} = 0, \tag{2.20}$$

$$-xA_x + A_t - \eta_t - A_{xx} = 0. \tag{2.21}$$

L'équation (2.21) et l'expression (2.18) entraînent

$$A_1(t) = \alpha_1 e^t, \quad \eta(t) = \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{-2t} + \alpha_4, \quad A_2(t) = \alpha_3 e^{-2t} + \alpha_5,$$

avec  $\alpha_1, \dots, \alpha_5$  sont des constantes arbitraires, et d'après l'équation (2.19) on obtient :

$$\alpha(t) = -\alpha_1 e^t + \alpha_6,$$

où  $\alpha_6$  est une constante arbitraire. D'où la solution générale du système est donnée par :

$$\xi(x, t, u) = (\alpha_2 e^{2t} - \alpha_3 e^{-2t})x - \alpha_1 e^t + \alpha_6 e^{-t}, \tag{2.22}$$

$$\eta(x, t, u) = \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{-2t} + \alpha_4, \tag{2.23}$$

$$\varphi(x, t, u) = (-\alpha_2 e^{2t} x^2 + \alpha_1 e^t x + \alpha_3 e^{-2t} + \alpha_5)u + \beta(x, t), \tag{2.24}$$

où  $\beta(x, t)$  est une solution quelconque de l'équation (1.1). Par conséquent l'algèbre de symétries de l'équation (1.1) est engendrée par les générateurs :

$$V_1 = -e^t \frac{\partial}{\partial x} + e^t x u \frac{\partial}{\partial u}, \tag{2.25}$$

$$V_2 = e^{2t} x \frac{\partial}{\partial x} + e^{2t} \frac{\partial}{\partial t} - e^{2t} x^2 u \frac{\partial}{\partial u}, \tag{2.26}$$

$$V_3 = -e^{-2t} x \frac{\partial}{\partial x} + e^{-2t} \frac{\partial}{\partial t} + e^{-2t} u \frac{\partial}{\partial u}, \tag{2.27}$$

$$V_4 = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{2.28}$$

$$V_5 = u \frac{\partial}{\partial u}, \tag{2.29}$$

$$V_6 = e^{-t} \frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.30}$$

et d'une infinité de générateurs de la forme :

$$V_\beta = \beta(x, t) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (2.31)$$

### A. Table de commutations de l'algèbre des symétries de l'équation Fokker-Planck

Dans ce paragraphe, nous donnerons les relations de commutations des générateurs de l'algèbre des symétries de l'équation Fokker-Planck

$$\begin{aligned} [V_1, V_2] &= 0, & [V_2, V_3] &= -4V_4 - 2V_5, & [V_3, V_5] &= 0, \\ [V_1, V_3] &= 0, & [V_2, V_4] &= 2V_2, & [V_3, V_6] &= 0, \\ [V_1, V_4] &= V_1, & [V_2, V_5] &= 0, & [V_4, V_5] &= 0, \\ [V_1, V_5] &= 0, & [V_2, V_6] &= 2V_1, & [V_4, V_6] &= -V_6, \\ [V_1, V_6] &= -V_5, & [V_3, V_4] &= 2V_3, & [V_5, V_6] &= 0, \\ [V_1, V_\beta] &= V_{e^t(x\beta + \beta_x)}, & [V_2, V_\beta] &= V_{e^{2t}(\beta_t + x\beta_x + x^2\beta)}, & [V_3, V_\beta] &= V_{e^{-2t}(\beta_t - \beta - x\beta_x)}, \\ [V_4, V_\beta] &= V_{\beta_t}, & [V_5, V_\beta] &= -V_\beta, & [V_6, V_\beta] &= V_{e^{-t}\beta_x}. \end{aligned}$$

Comme les  $V_i$  et le  $V_\beta$  forment une algèbre de Lie, la stabilité du crochet entraîne que si  $\beta(x, t)$  est une solution de l'équation de Fokker-Planck, alors les fonctions

$$e^t(x\beta + \beta_x), \quad (2.32)$$

$$e^{2t}(\beta_t + x\beta_x + x^2\beta), \quad (2.33)$$

$$e^{-2t}(\beta_t - \beta - x\beta_x), \quad (2.34)$$

$$\beta_t, \quad (2.35)$$

$$e^{-t}\beta_x, \quad (2.36)$$

seront aussi des solutions de l'équation (FP).

### B. Exemples de solutions

Considérons une solution particulière par exemple  $u(x, t) = e^t$ , alors les fonctions:

$$f_1(x, t) = xe^{2t},$$

$$f_2(x, t) = (x^2 + 1)e^{3t},$$

sont aussi solutions de l'équation (1.1). Par application de générateur de symétries Eq.(34) à la solution obtenue  $f_2$ , on obtient une autre solution:

$$f_3(x, t) = (x^4 + 6x^2 + 3)e^{5t},$$

de l'équation de Fokker-Planck (1.1). On constat alors qu'une famille de solutions peuvent-être construite d'une solution triviale.

### C. Détermination des groupes $G_i$ associés aux générateurs $V_i$

La détermination du groupe de transformations correspondant à chaque générateur revient à la résolution du système d'équations différentielles du premier ordre suivant :

$$\frac{d\tilde{x}}{d\epsilon} = \xi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}), \quad (2.37)$$

$$\frac{d\tilde{t}}{d\epsilon} = \eta(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}), \quad (2.38)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\epsilon} = \varphi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}), \quad (2.39)$$

avec la condition initiale

$$(\tilde{x}(0) = x, \quad \tilde{t}(0) = t, \quad \tilde{u}(0) = u).$$

#### 1. Application au générateur $V_1$

On a :

$$V_1 = -e^t \frac{\partial}{\partial x} + e^t x u \frac{\partial}{\partial u},$$

alors il faut résoudre le système :

$$\frac{d\tilde{x}}{d\epsilon} = \xi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) = -e^{\tilde{t}}, \quad (2.40)$$

$$\frac{d\tilde{t}}{d\epsilon} = \eta(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) = 0, \quad (2.41)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\epsilon} = \varphi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) = e^{\tilde{t}} \tilde{x} \tilde{u}, \quad (2.42)$$

avec la condition initiale

$$(\tilde{x}(0) = x, \quad \tilde{t}(0) = t, \quad \tilde{u}(0) = u).$$

$\frac{d\tilde{t}}{d\epsilon} = 0$ , donc  $\tilde{t} = cte$  et d'après la condition initiale  $\tilde{t}(0) = t$  on aura  $\tilde{t} = t$ .

$\frac{d\tilde{x}}{d\epsilon} = -e^{\tilde{t}}$ , donc  $\tilde{x} = -e^t \epsilon + cte$ , or  $\tilde{x}(0) = x$ , alors  $\tilde{x} = -e^t \epsilon + x$ .

$\frac{d\tilde{u}}{d\epsilon} = (-e^{2t} \epsilon + e^t x) \tilde{u}$ , ce qui implique que  $\tilde{u} = cte \exp\{-\frac{e^{2t}}{2} \epsilon^2 + e^t x \epsilon\}$ , et d'après la condition  $\tilde{u}(0) = u$ , on obtient le groupe de transformation engendré par  $V_1$  qui est le suivant

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= -e^t \epsilon + x, \\ \tilde{t} &= t, \\ \tilde{u} &= u \exp\{-\frac{e^{2t}}{2} \epsilon^2 + x e^t \epsilon\}. \end{aligned}$$

ce groupe de transformations est un groupe de symétrie pour l'équation (FP). D'où si  $u(x, t)$  est une solution de (1.1) alors

$$u_1(x, t) = u(x + e^t \epsilon, t) \exp\{-\frac{e^{2t}}{2} \epsilon^2 + x e^t \epsilon + e^{2t} \epsilon\},$$

sera solution de l'équation de Fokker-Planck (1.1).

2. Application au générateur  $V_2$ 

On a :

$$V_2 = e^{2t}x \frac{\partial}{\partial x} + e^{2t} \frac{\partial}{\partial t} - e^{2t}x^2u \frac{\partial}{\partial u},$$

le système correspondant est :

$$\frac{d\tilde{x}}{d\epsilon} = e^{2\tilde{t}}\tilde{x}, \quad (2.43)$$

$$\frac{d\tilde{t}}{d\epsilon} = e^{2\tilde{t}}, \quad (2.44)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\epsilon} = -e^{2\tilde{t}}\tilde{x}^2\tilde{u}, \quad (2.45)$$

de la même manière on commence par la détermination de  $\tilde{t}$  puis  $\tilde{x}$  et enfin  $\tilde{u}$  en prenant en considération la condition initiale  $\tilde{t}(0) = t$ ,  $\tilde{x}(0) = x$ , et  $\tilde{u}(0) = u$ , on trouve que le groupe de transformations engendré par  $V_2$  est donné par

$$\tilde{x} = \frac{xe^{-t}}{\sqrt{e^{-2t} - 2\epsilon}}, \quad (2.46)$$

$$\tilde{t} = -\frac{1}{2} \ln(e^{-2t} - 2\epsilon), \quad (2.47)$$

$$\tilde{u} = u \exp\left\{\frac{\epsilon x^2}{2\epsilon - e^{-2t}}\right\}, \quad (2.48)$$

c'est aussi un groupe de transformation qui laisse invariant l'ensemble des solutions  $\Pi_\Delta$ . Par conséquent si  $u(x, t)$  est une solution de l'équation de Fokker-Planck alors la fonction

$$u_2(x, t) = u\left(\frac{xe^{-t}}{\sqrt{e^{-2t} + 2\epsilon}}, \ln \frac{1}{\sqrt{e^{-2t} + 2\epsilon}}\right) \exp\left\{-\frac{\epsilon x^2}{2\epsilon + e^{-2t}}\right\},$$

est aussi solution.

### III. LES SYMÉTRIES POTENTIELLES

#### A. Rappels sur les symétries potentielles

La méthode de détermination des symétries potentielles pour une équation aux dérivées partielles est d'écrire celle-ci qu'on note par  $R(x, t, u)$  sous forme conservative. Un système noté  $S(x, t, u, v)$  avec un potentiel considéré comme une nouvelle variable est alors obtenu. Si  $(u(x, t), v(x, t))$  est une solution de  $S(x, t, u, v)$ , alors  $u(x, t)$  sera une solution de  $R(x, t, u)$ .

#### Définition 2

Etant donné une symétrie ponctuelle définie par un générateur  $V = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial u} + H \frac{\partial}{\partial v}$  d'une équation  $S(x, t, u, v)$ . Une telle symétrie donne naissance à une symétrie potentielle de  $R(x, t, u)$  si la condition

$$\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right)^2 \neq 0. \quad (3.1)$$

est vérifiée. Dans ce cas la symétrie  $\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial u}$  sera appelée une symétrie potentielle de l'équation.

**B. Les symétries potentielles de l'équation de Fokker-Planck**

Comme l'équation (1.1) notée  $R(x, t, u)$  peut-être écrite sous une forme conservative

$$(u)_t - (u_x + xu)_x = 0, \tag{3.2}$$

alors on lui associe le système

$$\begin{cases} v_t = u_x + xu, \\ v_x = u, \end{cases} \tag{3.3}$$

que l'on note par  $S(x, t, u, v)$ . Appliquons la méthode de la section précédente à ce système en considérant le groupe de transformations suivant :

$$\tilde{x} = x + \epsilon\xi(x, t, u, v) + O(\epsilon^2), \tag{3.4}$$

$$\tilde{t} = t + \epsilon\eta(x, t, u, v) + O(\epsilon^2), \tag{3.5}$$

$$\tilde{u} = u + \epsilon\varphi(x, t, u, v) + O(\epsilon^2), \tag{3.6}$$

$$\tilde{v} = v + \epsilon H(x, t, u, v) + O(\epsilon^2). \tag{3.7}$$

L'algèbre de symétries associée au groupe de transformations ci-dessus est formée des générateurs de la forme

$$Y = \xi(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + H(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial v}. \tag{3.8}$$

En posant  $\Delta_1 = v_t - u_x - xu$ , et  $\Delta_2 = v_x - u$ , on a d'après le critère (2.5) le groupe de transformations (3.4),(3.5),(3.6),(3.7) est un groupe de symétrie pour le système (3.3) ssi :

$$Pr^{(1)}Y(\Delta_i)|_{\Delta_i=0, i=1,2} = 0, \tag{3.9}$$

où  $Pr^{(1)}Y$  désigne le prolongement d'ordre 1 de  $Y$  donné par :

$$Pr^{(1)}Y = Y + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + H^x \frac{\partial}{\partial v_x} + H^t \frac{\partial}{\partial v_t},$$

avec

$$\varphi^t = D_t\varphi - u_x D_t\xi - u_t D_t\eta, \tag{3.10}$$

$$\varphi^x = D_x\varphi - u_x D_x\xi - u_t D_x\eta, \tag{3.11}$$

$$H^x = D_xH - v_x D_x\xi - v_t D_x\eta, \tag{3.12}$$

$$H^t = D_tH - v_x D_t\xi - v_t D_t\eta, \tag{3.13}$$

et  $D$  désigne la dérivée totale. Par conséquent le critère (3.9) est équivalent à

$$\begin{cases} -u\xi - x\varphi - \varphi^x + H^t = 0, & |(\Delta_i=0, i=1,2) \\ H^x - \varphi = 0, & |(\Delta_i=0, i=1,2) \end{cases}$$

En substituant à  $\varphi^x, \varphi^t, H^x$  et  $H^t$  leurs expressions on obtient le système suivant :

$$\eta_u = 0, \tag{3.14}$$

$$-u\xi - x\varphi - \varphi_x - u\varphi_v + H_t + (H_v - \eta_t)xu - u\xi_t - (xu)^2\eta_v - xu^2\xi_v = 0, \tag{3.15}$$

$$\xi_x - \varphi_u + H_v - \eta_t - 2xu\eta_v = 0, \tag{3.16}$$

$$\xi_u - \eta_v = 0, \tag{3.17}$$

$$\eta_x + u\eta_v + H_u - u\xi_u = 0, \tag{3.18}$$

$$H_x + uH_v - u\xi_x - u^2\xi_v - xu\eta_x - xu^2\eta_v - \varphi = 0, \tag{3.19}$$

$$H_u - u\xi_u - \eta_x - u\eta_v = 0, \tag{3.20}$$

après un long calcul on obtient la solution du système (3.14),(3.15),(3.16),(3.17),(3.18) et (3.19) qui est :

$$\begin{aligned}\xi(x, t, u, v) &= (-k_1 e^{2t} + k_3 e^{-2t})x + k_5 e^{-t} - k_2 e^t, \\ \eta(x, t, u, v) &= -k_1 e^{2t} - k_3 e^{-2t} + k_6, \\ \varphi(x, t, u, v) &= (k_1 e^{2t} x^2 + k_2 e^t x + 2k_1 e^{2t} - k_3 e^{-2t} + k_4)u + (2k_1 e^{2t} x + k_2 e^t)v + L_x(x, t), \\ H(x, t, u, v) &= (-k_1 e^{2t} + k_1 e^{2t} x^2 + k_2 e^t x + 2k_1 e^{2t} + k_4)v + L(x, t),\end{aligned}\quad (3.21)$$

où  $k_1, \dots, k_6$  sont des constantes arbitraires et  $L(x, t)$  est une solution quelconque de l'équation

$$v_t = v_{xx} + xv_x. \quad (3.22)$$

Ainsi l'algèbre des symétries de système (3.3) est engendrée par les générateurs

$$\begin{aligned}Y_1 &= -e^{2t} x \frac{\partial}{\partial x} - e^{2t} \frac{\partial}{\partial t} + [(e^{2t} x^2 + 2e^{2t})u + 2e^{2t} xv] \frac{\partial}{\partial u} + (e^{2t} x^2 + e^{2t})v \frac{\partial}{\partial v}, \\ Y_2 &= -e^t \frac{\partial}{\partial x} + (e^t xu + e^t v) \frac{\partial}{\partial u} + e^t xv \frac{\partial}{\partial v}, \\ Y_3 &= e^{-2t} x \frac{\partial}{\partial x} - e^{-2t} \frac{\partial}{\partial t} - e^{-2t} u \frac{\partial}{\partial u}, \\ Y_4 &= u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}, \\ Y_5 &= e^{-t} \frac{\partial}{\partial x}, \\ Y_6 &= \frac{\partial}{\partial t},\end{aligned}\quad (3.23)$$

et d'une infinité de générateurs de la forme

$$Y_L = L_x(x, t) \frac{\partial}{\partial u} + L(x, t) \frac{\partial}{\partial v},$$

l'existence de cette symétrie est due à la linéarité du système (3.3).

On voit bien que pour les générateurs  $Y_1$  et  $Y_2$ , la condition Eq.(3.1) est satisfaite, par conséquent de telles symétries donnent naissance à des symétries potentielles de l'équation de Fokker-Planck

$$Y_1 = -e^{2t} x \frac{\partial}{\partial x} - e^{2t} \frac{\partial}{\partial t} + [(e^{2t} x^2 + 2e^{2t})u + 2e^{2t} xv] \frac{\partial}{\partial u}, \quad (3.24)$$

$$Y_2 = -e^t \frac{\partial}{\partial x} + (e^t xu + e^t v) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (3.25)$$

Pour ces symétries, le coefficient  $\varphi$  ne dépend pas uniquement de  $(x, t, u)$  mais aussi d'une autre variable qui est le potentiel  $v$ . Par conséquent ces symétries obtenues sont d'un autre type.

#### IV. CONCLUSION

Dans ce travail on a déterminé toutes les symétries de Lie ponctuelles de l'équation de Fokker-Planck. Nous avons donné aussi un exemple de solutions de cette équation. Ensuite, on a considéré un système auxiliaire dû à la forme conservative de l'équation pour lequel la détermination des symétries ponctuelles donne naissance à des symétries potentielles pour l'équation de Fokker-Planck.

---

**V. REFERENCES**

---

- <sup>1</sup> Lie, S.; *Theories der Transformation gruppen*. Dritter und Letzter Abschnitt, Teubner, Leipzig, 1893.
- <sup>2</sup> Olver, P.J., *Application of Lie groups to Differential Equation*, Springer, New York 1986.
- <sup>3</sup> Stephani, H., *Differential equations: Their Solution Using Symmetries*, Cambridge University Press, 1989.
- <sup>4</sup> Bluman, G.W. and Kumei, S., *Symmetries and Differentials Equations*, Springer, New York 1989.
- <sup>5</sup> Bluman G.W., Anco, S.C., *Symmetry and Integration Methods for Differential Equqtions* (Springer, New York, 2002).
- <sup>6</sup> Ibragimov, N.H., *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics* ( Reidel Publishing Company, Holland, 1985).
- <sup>7</sup> Ovsiannikov, L.V., *Groups Analysis of Differential Equqtions* ( Adademic Press, New York, 1982).
- <sup>8</sup> A. Ouhadan and E.H. El Kinani, *Journal of Groups, Geometry and Algebras Vol.22, N.4, (2005) 423* .
- <sup>9</sup> Till D. Frank, *Nonlinear Fokker-Planck equations: Fundamentals and Applications* (Springer, Verlag Berlin Heidelberg 2005).
- <sup>10</sup> A.H. Khater, D.K. Callebaut, and T.N. Abdelhameed., *Eur. Phys. J. B* 50, 17-21 (2006).
- <sup>11</sup> C.C.A. Sastri and K. A. Dunn., *J. Math. Phys.* 26(12), December 1985.